

填空题、选择题练习 (内积空间部分)

一. 填空题

1. 在 \mathbb{R}^2 中定义内积,

$$(X, Y) = x_1 y_1 + 2x_2 y_2, \forall X = (x_1, x_2), Y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2,$$

则基 $\alpha_1 = (1, 1), \alpha_2 = (1, 2)$ 的度量矩阵为 ().

2. 已知 $e_1 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})', e_2 = (-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})', e_3 = (0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})'$ 是 \mathbb{R}^3 的一组标准正交基, 则向量 $\beta = (1, -1, 0)'$ 在该基下的坐标为 ().

3. 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 为正交矩阵且 $a_{11} = -1$, 则矩阵方程 $AX = (1, 0, \dots, 0)'$ 的解为 (), $YA = (1, 0, \dots, 0)$ 的解为 ().

4. 设实对称矩阵 $A_{3 \times 3}$ 的全体特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 2$, 且 $X_3 = (1, 1, 1)'$ 是 A 的属于特征值 2 的一个特征向量, 则 A 的属于特征值 -1 的全体特征向量为 ().

二. 选择题

1. 在下列二元实函数中, () 可作为实线性空间 $V = C[-1, 1]$ 的内积.

(A) $\varphi_1(f(x), g(x)) = 1, \forall f(x), g(x) \in V;$

(B) $\varphi_2(f(x), g(x)) = \int_0^1 f(x)g(x)dx, \forall f(x), g(x) \in V;$

(C) $\varphi_3(f(x), g(x)) = \int_0^1 f(x)g(x)dx - \int_{-1}^0 f(x)g(x)dx, \forall f(x), g(x) \in V;$

(D) $\varphi_4(f(x), g(x)) = \int_{-1}^0 f(x)g(x)dx + 2 \int_0^1 f(x)g(x)dx, \forall f(x), g(x) \in V.$

2. 在 \mathbb{R}^4 中, 与矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ 的每个行向量都正交的全体向量所构成的子空间 W 的维数为 ().

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

3. 下列矩阵中, () 是正交矩阵.

(A) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix};$ (B) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix};$

$$(C) \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}; \quad (D) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 3 \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -1 \end{pmatrix};$$

4. 设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n} (n \geq 2)$, A^* 为 A 的伴随矩阵, 则 A 为正交矩阵的充分必要条
件为 ().

(A) A^2 为正交矩阵 (B) A^* 为正交矩阵

(C) 当 $|A| > 0$ 时 $A^* = A'$ (D) 当 $|A| < 0$ 时 $A^* = -A'$

5. 设 $(1, 2)'$ 是实对称矩阵 A 的特征向量, 且 $|A| < 0$, 则 () 也是 A 的特征
向量.

(A) $k(1, 2)', k \in \mathbb{R}$ (B) $k(-2, 1)', k \in \mathbb{R}$ 非零

(C) $k_1(1, 2)' + k_2(-2, 1)', k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ 不全为零

(D) $k_1(1, 2)' + k_2(-2, 1)', k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ 全不为零