

第八章 二次型

一、填空。

1. 写出 $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 + x_1x_2 - 2x_1x_3 + 3x_2x_3$ 的相伴矩阵

_____.

2. 写出方阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的二次型 _____.

3. 将 $f = x_1x_{2n} + x_2x_{2n-1} + \dots + x_nx_{n-1}$ 化为标准型 _____.

4. 求 $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4$ 的秩为 _____, 符号差为 _____.

5. 当 t 满足 _____ 条件时, $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2tx_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$ 是正定二次型.

6. 设 $A = [a_{ij}]$ 为正定阵, 则 $f(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & y_1 \\ & \cdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & y_n \\ y_1 & \cdots & y_n & 0 \end{vmatrix}$, 是 _____ (正定, 负定, 半正定, 半负定, 不定).

7. 若实对称阵 A 与 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ 合同, 求二次型 $X'AX$ 的规范型 _____.

8. 设 A 是 n 阶实对称矩阵, 则 t 满足 _____ 条件时, $A + tI$ 正定.

二、选择。

1. 下列命题错误的是 _____.

A): 对称方阵只能与对称方阵合同.

B): E 与 $-E$ 在复数域上合同, 但在实数域上不合同.

C): 若 A 与 B 合同, 则存在唯一的满秩阵 C , 使得 $B = C'AC$.

D): 二次型 $f = X'AX$ 经过满秩线性变换后, 秩不变.

2. 下列命题正确的是 _____.

A): 实对称矩阵 $A = \begin{pmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \cdots & \\ 0 & & & a_n \end{pmatrix}$, 与单位方阵在实数域上合同的充分

必要条件是: 每个 $a_i > 0 (i = 1, \dots, n)$.

B): 若 A 为实的 n 阶满秩矩阵, 若 A 与 $-A$ 在实数域上合同, 则 n 为偶数或奇数均可.

C): 若 A, B 为对称矩阵, 且存在 n 维向量 X , 使得 $X'AX = X'BX$, 则 $A = B$.

D): 若 A 是实方阵且 $|A| > 0$, 则 A 必与单位方阵在实数域上合同.

3. 下列命题错误的是 ____.

A): t 为任何值, $f = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2tx_1x_2 + 10x_1x_3 + 6x_2x_3$ 均为正定的.

B): 若 $A' = A$ 是实对称阵, 则 A 是正定阵 $\iff A$ 与单位阵合同.

C): 若 A 是正定阵, 则任意实 n 阶方阵 $C, C'AC$ 都是正定的.

D): 任意两个正定阵均合同.

4. A, B 均是 n 阶正定阵, 下列阵不一定是正定阵的是 ____.

A): $A + B$

B): A^{-1}

C): \forall 整数 m, A^m

D): $A - B$

E): AB

F): $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$,

5. 下列命题错误的是 ____.

A): $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = n \sum_1^n x_i^2 - (\sum_1^n x_i)^2$ 是半正定二次型.

B): A, B, C, D 是 n 阶对称阵, 且 A 与 B 合同, C 与 D 合同, 则 $A + C$ 与 $B + C$ 合同, $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$ 合同.

C): 正定矩阵的主对角元都大于 0.

D): 负定矩阵的主对角元都小于 0.

李凤整理