

特征值基础训练

一. 判断题

1. 设 α, β 是属于线性变换 φ 同一特征值 λ_0 的两个特征向量, 且 $\alpha \neq \beta$, 则 $a\alpha + b\beta$ 也是 φ 的特征向量, 其中 a, b 不同时为零. ()
2. 设 A 是 n 阶方阵, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 分别是 A 的属于互异特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 的特征向量, 则 $k_1\alpha_1 + \dots + k_n\alpha_n$ (k_1, \dots, k_n 不全为零) 为 A 的全部特征向量. ()
3. 设 φ 是数域 K 上的 n 维向量空间 V 的线性变换, φ 的不同特征值为 $\lambda_1, \dots, \lambda_t$, 对应的特征子空间分别为 $V_{\lambda_1}, \dots, V_{\lambda_t}$, 则 φ 可对角化的充要条件是 $\sum_{i=1}^t \dim V_{\lambda_i} = n$. ()
4. 2 阶方阵彼此相似当且仅当它们的极小多项式相同. ()
5. 数域 K 中任意数都是 K 上线性空间 V 的零变换的特征值. ()
6. 若 $|\lambda I - A| = |\lambda I - B|$, A 可对角化, 则 B 也可对角化. ()
7. 若 λ 是 V 上线性变换 φ 的特征值, 则 λ 作为特征多项式的重数不超过特征子空间 V_λ 的维数 ().
8. 设 φ 是数域 K 上的 n 维线性空间 V 的线性变换, 如果 V 的任意一个一维子空间都是 φ -不变子空间, 则 φ 可对角化. ()
9. n 阶方阵 A 为可逆阵的充要条件是 A 的特征值全不为零. ()
10. 设 A, B 是 n 阶方阵, 则 AB 与 BA 相似. ()

二. 填空题

1. 设三阶方阵 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 且两两互异, 对应的特征向量依次为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, 则 $A =$ _____.
2. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & x & 1 \\ x & 1 & y \\ 1 & y & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. 则当 $x =$ _____, $y =$ _____ 时, A 与 B 相似.
3. 设可逆矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ a_2 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, 则 A 在 \mathbb{R} 上可对角化的充要条件是 _____.
4. 设 A 为三阶方阵, 且 $|\lambda I - A| = \lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 2$, 则 A 相似于矩阵 _____.
5. 设 $|A| = 0, B + A = 2I$, 则矩阵 B 有一个特征值 _____.
6. 已知 A 满足 $A^2 + 2A + I = 0$, 则 A 的特征值为 _____.

7. 已知三阶方阵 A 的三个特征值为 $1, 2, 3$, 则 $|A| =$ _____, A^T 的特征值 _____, A^{-1} 的特征值 _____, A^* 的特征值 _____, $A^2 + 2A + I$ 的特征值 _____.

8. 设 A 是三阶方阵, 且 $|A-I| = |A+2I| = |2A+3I| = 0$, 则 $|2A^*-3I| =$ _____.

9. 设 A 是 n 阶幂等矩阵, 则 $|I+A| =$ _____.

10. 若 n 阶可逆阵 A 的每行元素之和均为 $a(a \neq 0)$, 则 _____ 一定是 $2A^* - 3I$ 的特征值.

11. 已知三阶方阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ x & -2 & 2 \\ 3 & y & -1 \end{pmatrix}$ 有一个特征向量 $P_1 = (1, -2, 3)^T$, 则 $x =$ _____, $y =$ _____, P_1 对应的特征值为 _____.

12. 设 A 是 n 阶方阵, $|A| = 5$, 则 $B = AA^*$ 的特征值是 _____, 特征向量是 _____.

三. 选择题

1. 设 S 是对合阵, P 是幂等阵, H 是非零幂零阵, 则 _____ 可对角化.

(A) S, P, H (B) 仅 S, P (C) 仅 S (D) S, P, H 都不能

2. 下列命题正确的是 _____.

(A) 若 A 不是数量阵, 则与 A 相似的方阵只有有限个.

(B) 若 A 为实方阵, 则 A 必相似于上三角阵.

(C) A, B 为任意两个同阶方阵, 若 A 相似于 B , 则 A^* 相似于 B^* .

(D) 数域 F 上的任意方阵 A 的极小多项式存在, 但不唯一.

3. 与矩阵 $\begin{pmatrix} -10 & 4 \\ 26 & 11 \end{pmatrix}$ 相似的矩阵是 _____.

(A) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

4. 设 A 为三阶方阵, 其特征值分别为 $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 1$, 对应的特征向量分别为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, 记 $P = (\alpha_3, \alpha_1, \alpha_2)$. 则 $P^{-1}AP =$ _____.

(A) $\begin{pmatrix} 3 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 3 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$

5. 如果方阵 A 与对角阵 $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ 相似, 则 $A^{10} = \underline{\hspace{2cm}}$.

- (A) I (B) A (C) $-I$ (D) $10I$

6. 与 n 阶单位阵 I 相似的矩阵是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

- (A) 数量阵 $kI(k \neq 0)$ (B) 对角阵 (对角线上元素全不为 0) (C) I (D) n 阶可逆阵

7. 令 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 则 A 的特征多项式为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

- (A) $x^2 - \text{Tr}(A)x + |A|$ (B) $x^2 + \text{Tr}(A)x + |A|$
(C) $x^2 - \text{Tr}(A)x - |A|$ (D) $x^2 + \text{Tr}(A)x - |A|$

8. 矩阵 $\underline{\hspace{2cm}}$ 与对角阵相似.

- (A) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
(C) $\begin{pmatrix} 4 & 5 & -7 \\ 5 & 6 & 8 \\ -7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & 8 & -2 \end{pmatrix}$

9. 设 λ_1, λ_2 是矩阵 A 的两个不同特征值, α_1, α_2 是 A 的分别属于 λ_1, λ_2 的特征向量,

则 $\underline{\hspace{2cm}}$.

- (A) 对任意 $k_1 \neq 0, k_2 \neq 0$, $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$ 都是 A 的特征向量
(B) 存在常数 $k_1 \neq 0, k_2 \neq 0$, 使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$ 是 A 的特征向量
(C) 当 $k_1 \neq 0, k_2 \neq 0$ 时, $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$ 不可能是 A 的特征向量
(D) 存在唯一一组常数 $k_1 \neq 0, k_2 \neq 0$, 使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$ 是 A 的特征向量

10. 以线性空间 V 的任意非零向量作为特征向量的线性变换只能是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

- (A) 零变换 (B) 数乘变换 (C) 单位变换 (D) 可逆变换

林增强整理