

第四章 线性变换

一. 填空题

1. $\mathbb{R}[x]_n$ 中线性变换 $\sigma: f(x) \mapsto f(x+1), \forall f(x) \in \mathbb{R}[x]_n$ 在基 $1, x, x^2, \dots, x^n$ 下的矩阵为 ().

2. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, σ 是 $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ 的线性变换, $\sigma(X) = AX - XA, \forall X \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, 则 σ 在基 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 下的矩阵为 ().

3. 设 $\sigma \in L(V)$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, 则 σ 在基 $\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1$ 下的矩阵为 ().

4. 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 可逆, 且 A 的每行元素之和都为 c , 则 $2A + 3A^{-1}$ 的每行元素之和为 ().

5. 设 V 是由次数小于 4 的实系数多项式全体构成的向量空间, D 为其上的求导变换, 则在基 $1, x, x^2, x^3$ 下线性变换 D 的矩阵为 ().

6. 设 V 为一维向量空间, 则 V 上所有的线性变换为 ().

二. 选择题

1. 设 σ 为三维向量空间上的变换, 下列 σ 不是线性变换的是 ().

A $\sigma(a_1, a_2, a_3) = (2a_1 - a_2 + a_3, a_2 + 5a_3, a_1 - a_3);$

B $\sigma(a_1, a_2, a_3) = (a_1^2, a_2^2, a_3^2);$

C $\sigma(a_1, a_2, a_3) = (0, a_1, 0);$

D $\sigma(a_1, a_2, a_3) = (3a_3, 3a_2, 3a_1).$

2. 在线性空间 \mathbb{R}^3 中, $\alpha = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$, 判断下列哪一个变换是线性变换 ().

A $T(\alpha) = (2x_1 - x_3, x_2 + x_3, x_1 + x_3)^T;$

B $T(\alpha) = (\sin x_1, 0, 0)^T;$

C $T(\alpha) = (x_1^2, x_2^2, x_3^2)^T;$

D $T(\alpha) = (\sin x_1, \cos x_2, 1)^T.$

3. 设 $T \in L(\mathbb{R}^3)$, 定义 $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + 3x_3, 5x_1 + 6x_2 - 7x_3, 7x_1 + 4x_2 - x_3)$, 则下列向量中为 $\text{Ker}(T)$ 中的向量的是 ().

A $(5, 2, -1);$

B $(4, -2, -2);$

C $(-2, 4, 2)$; D $(-1, -2, 1)$.

4. 设 $T \in L(F[x]_3)$, 定义 $T(f(x)) = f(x+1) - f(x), \forall f(x) \in F[x]_3$, 则 T 在 $F[x]_3$ 的基 $1, x, x^2$ 下的矩阵为 ().

A $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; B $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

C $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$; D $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

5. 设 $T \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$, 定义为 $T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, 对于 \mathbb{R}^2 的基 $(I) = \{\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}\}$, \mathbb{R}^3 的基 $(II) = \{\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_2 =$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$, 则 T 在基 $(I), (II)$ 下的矩阵为 ().

A $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 4 & -6 & 4 \end{pmatrix}$; B $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$;

C $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; D $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

6. 设线性变换 T 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 下的矩阵为 $A, |A| = 5$, 且线性变换 T 在基 $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_1$ 的矩阵为 B , 则 $|B|$ 为 ().

A 不能确定; B 5; C $\frac{1}{5}$; D 5^n .

三. 简答题

1. 判断下列变换哪些是线性变换.

(1). \mathbb{R}^2 中: $T(x_1, x_2)^T = (x_1 + 1, x_2^2)^T$;

(2). \mathbb{R}^3 中: $T(x_1, x_2, x_3)^T = (x_1 + x_2, x_1 - x_2, 2x_3)^T$;

(3). $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ 中: $T(A) = A^*, A^*$ 为 A 的伴随矩阵.

2. 下列命题是否正确? 为什么?

(1). 线性变换 T 把 V 的线性相关向量组变为线性相关向量组.

(2). 线性变换 T 把 V 的线性无关向量组变为线性无关向量组.

3. 如何计算向量组在线性变换下的象?

陈建敏整理