

线性变换

一

$$1 \quad \begin{bmatrix} 1 & C_1^0 & C_2^0 & \cdots & C_n^0 \\ 0 & C_1^1 & C_2^1 & \cdots & C_n^1 \\ 0 & 0 & C_2^2 & \cdots & C_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & C_n^n \end{bmatrix}$$

$$2 \quad \begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$3 \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$4 \quad 2c + \frac{3}{c}$$

$$5 \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$6 \quad \{\sigma: \alpha \mapsto \kappa\alpha, \alpha \in V, \kappa \neq 0\}$$

二

$$1 \quad B \quad 2 \quad A \quad 3 \quad C \quad 4 \quad B \quad 5 \quad C \quad 6$$

三

$$1 \quad (1) \text{ 不是线性变换} \quad (2) \text{ 是线性变换} \quad (3) \text{ 不是线性变换}$$

$$2 \quad (1) \text{ 正确}$$

证明：设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 是一组线性相关的向量组，则存在不全为零的数

$$k_1, k_2, \dots, k_s \text{ 使 } k_1\alpha_1 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$$

$$\text{因此 } T(k_1\alpha_1 + \cdots + k_s\alpha_s) = 0$$

$$\text{得: } k_1T(\alpha_1) + \cdots + k_sT(\alpha_s) = 0.$$

因为 k_1, \dots, k_s 不全为零，所以 $T(\alpha_1), \dots, T(\alpha_s)$ 线性相关。

(2) 不正确。

$$\text{例如: } \alpha_1, \alpha_2 \text{ 线性无关, } T(\alpha_1) = 0, T(\alpha_2) = 0.$$

显然 $T(\alpha_1), T(\alpha_2)$ 线性相关.

3 解: 设 $T: V \rightarrow V$ 的线性变换, e_1, e_2, \dots, e_n 为 V 的一组基,

$$T(e_1, \dots, e_n) = (e_1, \dots, e_n)A$$

f_1, \dots, f_s 为 V 的任意一组向量, $\{e_1, \dots, e_n\}$ 到 $\{f_1, \dots, f_s\}$ 的过渡

矩阵为 P , 则 $T(f_1, \dots, f_s) = (e_1, \dots, e_n)PA$