

相似标准型基础训练

填空题与判断题

1. λ -矩阵 $A(\lambda) = \begin{pmatrix} 1-\lambda & \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2 \end{pmatrix}$ 的标准型是 _____.

2. 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. 则 A 的特征多项式是 _____; 最小多项式是 _____; 行列式因子是 _____; 不变因子是 _____; 初等因子是 _____; Jordan 标准型是 _____.

3. 设 $A \in C^{6 \times 6}$, $f_A(\lambda) = (\lambda + 2)^2(\lambda - 1)^4$, $m_A(\lambda) = (\lambda + 2)(\lambda - 1)^3$, 则 A 的 Jordan 标准型是 _____.

4. 矩阵 $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ 0 & 0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}$, 其中 $a_2 \neq 0$, 则 A 的 Jordan 标准型是 _____.

5. 已知矩阵的初等因子为: $\lambda, \lambda^2, \lambda^2, (\lambda + 1), (\lambda + 1), (\lambda + 1)^2, \lambda - 1, (\lambda - 1)^2, (\lambda - 1)^2, (\lambda - 1)^3$, 则标准型为 _____.

6. 已知矩阵 A 的不变因子组为 $1, \cdots, 1, \lambda, \lambda^2(\lambda - 1), (\lambda - 1)^3(\lambda^2 + 1)\lambda^2$, 则 A 在有理数域上的初等因子组为 _____, 在实数域上的初等因子组为 _____, 在复数域上的初等因子为 _____.

7. 设 A, B 为同阶幂等矩阵, 即 $A^2 = A, B^2 = B$. 若 A 和 B 的秩相同, 问 A 和 B 是否相似 _____.

8. 2 阶方阵彼此相似当且仅当它们的极小多项式相同结论对否 _____, 又结论对 3 阶方阵正确否 _____.

9. 设 A 和 B 都是 3 阶幂零矩阵, 则 A 和 B 相似的充要条件是 $m_A(\lambda) = m_B(\lambda)$ 对否 _____, 又结论对 4 阶幂零矩阵正确否 _____.

10. λ -矩阵 $A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda+a & b & 1 & 0 \\ -b & \lambda+a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda+a & b \\ 0 & 0 & -b & \lambda+a \end{pmatrix}$ 的行列式因子为 _____,

不变因子为 _____.

11. 求 λ -矩阵 $A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^2+2 & \lambda^2+1 & \lambda^2+1 \\ 3 & \lambda+1 & 3 \\ \lambda^2+1 & \lambda^2+1 & \lambda^2+1 \end{pmatrix}$ 在有理数域, 实数域, 复数域上的初等因子及标准型为 _____.

12. 设 A 为 3 阶幂零矩阵, 则 A 可能的 Jordan 标准型为 _____.

13. 设 A 为 3 阶幂等矩阵, 则 A 可能的 Jordan 标准型为 _____.

14. 设 A 为 3 阶矩阵, 满足 $A^2 = E$, 则 A 可能的 Jordan 标准型为 _____.

15. 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ 的有理标准型为 _____.

16. 3 阶矩阵 A 的 Jordan 标准型是 $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, 且使 $P^{-1}AP = J$ 的 P 是 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, 如果 $f(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^2 + 2$, 试求 $f(A) =$ _____.

17. 设 $f_A(\lambda)$ 是 n 阶矩阵 A 的特征多项式, $m_A(\lambda)$ 是 A 的极小多项式, 证明: $f_A(\lambda) | (m_A(\lambda))^n$.

18. 秩为 1 的 n 阶复方阵的 Jordan 标准型为 _____.

19. 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ 的极小多项式为 _____.

20. 已知 4 阶矩阵 A 的极小多项式为 $(\lambda^2 - 4)(\lambda^2 - 9)$, 则 A 的 Jordan 标准型为 _____.

21. n 阶矩阵 A 是幂零矩阵, 即有大于 1 的整数 k , 使 $A^k = 0, A^{k-1} \neq 0$, 则 A 的最后一个不变因子是 _____.

22. 设 A 是 n 阶矩阵且 $A^2 - 3A + 2I_n = 0$, 问 A 是否必相似于对角阵

_____.

23. 一个 n 阶有理数矩阵 A 的极小多项式是一个不可约多项式 (有理数域上), 问 A 的 Jordan 标准型是否必可对角化 _____.

24. A, B 是同阶幂等矩阵, 即 $A^2 = A, B^2 = B$. 若 A 和 B 的秩相同, 问 A 和 B 是否必相似 _____.

25. 设 A 是 n 阶矩阵且有特征值 1, 又 A 只有一个线性无关的特征向量, 求 A 的 Jordan 标准型 _____.

庄清渠整理