

判断题、选择题、填空题练习 (多项式部分)

一. 填空.

(1) $f(x) = x^3 - 10x + 5$, 则 $f(x)$ 在有理数域上 _____ (可约, 不可约), $f(x)$ 在实数域上有 _____ 个根.

(2) 已知 $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ 的三个根是 x_1, x_2, x_3 , 求一个三次方程使其根为 x_1^2, x_2^2, x_3^2 .

(3) $f(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1, g(x) = x^2 - x - 1$, 则存在 $u(x) = \underline{\hspace{2cm}}, v(x) = \underline{\hspace{2cm}}, d(x) = \underline{\hspace{2cm}}$, 使 $d(x) = f(x)u(x) + g(x)v(x)$.

(3) 当整数 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 时, 多项式 $x^3 - \frac{1}{2}x^2 + ax - 2$ 有有理根.

(4) 多项式 $x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 20x + 3$ 有一根 $3 + 2i$, 则其余根 _____.

(5) 以 $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ 为根的可约多项式 _____.

(6) 已知 $f(x) = x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 12x + 9$ 有重根, 则 $(f(x), f'(x)) = \underline{\hspace{2cm}}, f(x)$ 的所有根是 _____.

(7) $f(x) = x^4 + p(x) + q$, 则 $f(x)$ 的判别式 _____.

(8) 设 $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, 则 $f(x)$ 被 $x - c$ 除所得的商式为 _____, 余式为 _____.

(9) 当 l 与 m 满足 _____ 时, $x^2 + mx + 1 \mid x^3 + lx^2 + 5x + 2$.

(10) 将 $f(x) = 2x^5 + 5x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 4x - 3$ 表示成 $x - 3$ 的方幂的和 _____.

(11) 求一个 2 次多项式, 使它在 $x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$ 处与函数 $\sin x$ 有相同的值 _____.

(12) 多项式 $x^3 + px + q$ 有重根的条件 _____.

(13) $f(x) = 2x^5 + 5x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 4x - 3$, 在实数域上的标准分解 _____; 在复数域的标准分解 _____.

(14) 设 $g(x) = x^2 - 4x + a$, 且存在唯一一个首一的 3 次多项式 $f(x)$, 使得 $g(x) \mid f(x)$, 且 $f(x) \mid g^2(x)$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}, f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(15) 若多项式 $x^3 + 5x^2 - 2x + 1$ 三根 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, 则 $\alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3 = \underline{\hspace{2cm}}$.

(16) 用初等多项式表示对称多项式 $(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_2 + x_3) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(17) 四元对称多项式 $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3$ 表为初等对称多项式 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 的多项式为 _____.

(18) $x^5 + x^4 - x^3 + 2x^2 - x - 2$ 的有理根是 _____, 在有理数域上的标准分解式为 _____.

(19) 设 $f(x) = x^4 - x^3 - x^2 + 2x - 1, g(x) = x^2 - 2x + 1$, 则存在 $u(x) =$ _____, $v(x) =$ _____, 使得 $u(x)f(x) + v(x)g(x) = (f(x), g(x))$.

(20) 中国剩余定理: 设 $\{f_i(x) | 1 \leq i \leq m\}$ 是 _____ 的多项式, a_1, a_2, \dots, a_m 是 m 个数, 则存在多项式 $f(x)$, 使得 _____.

(21) 以 $\sqrt{2} + i$ 为根的次数最小的有理系数多项式是 _____.

(22) 已知实系数多项式 $x^3 + px + q$ 有一个虚根 $3 + 2i$, 则其余两个根是 _____.

(23) 关于整系数多项式不可约性的 Eisenstein 判别法是 _____.

二. 选择.

(1) 下列命题中正确的有 _____ 个.

(I) $p(x), f(x) \in \mathbb{K}[X]$, $p(x)$ 是不可约多项式, 则 $p(x) | f(x) \iff p(x)$ 与 $f(x)$ 在 \mathbb{C} 上有公共根.

(II) $(f(x), g(x)) = 1 \iff f(x), g(x)$ 无公共根.

(III) $f(x)$ 是三次有理多项式, 则 $f(x)$ 在有理数域上不可约.

(IV) 如果 $(f'(x), f''(x)) = 1$, 则 $f(x)$ 的重因式是 2 重因式.

A.1 B.2 C.3 D.4

(2) 下列命题中错误的有 _____ 个.

(I) 若 $f_1(x) = af(x) + bg(x), f_2(x) = cf(x) + dg(x)$, 则 $(f(x), g(x)) = (f_1(x), g_1(x))$.

(II) 若 $f(x) \neq 0, g(x) \neq 0, f(x)p(x) + g(x)q(x) = (f(x), g(x))$, 则 $(p(x), q(x)) =$

1.

(III) 若 $(f(x)g(x), h(x)) = 1$, 则 $(f(x), h(x)) = 1, (g(x), h(x)) = 1$.

(IV) 若 $f(x) | g(x)h(x)$ 且 $f(x) | g(x)$, 则 $(f(x), h(x)) = 1$.

A.1 B.2 C.3 D.4

(3) 如果实系数多项式 $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_0$ 系数满足 $a_0a_1 < 0, a_1a_2 < 0, \dots, a_{n-1}a_n < 0$, 则 $f(x)$ 的根 _____.

A. > 0 B. > 0 C. $= 0$ D. ≤ 0

(4) 已知 α 是 $f(x)$ 与 $f(x)^{(k-1)}$ 的根, 但不是 $f(x)^{(k)}$ 的根, 则 α _____.

A. 是 $f(x)$ 的 k 重根. B. 是 $f(x)$ 的单根. C. 不是 $f(x)$ 根. D. 未

必是 $f(x)$ 的 k 重根.

三. 判定题 (若命题成立, 给出证明; 若命题不成立, 给出反例)(24 分, 每题 6 分).

(1) 设 $f(x)|g(x)h(x)$, 则或 $f(x)|g(x)$, 或 $f(x)|h(x)$.

(2) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是实数域上的多项式且 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在复数域上无公共根, 则 $(f(x), g(x)) = 1$.

(3) 设 $f(x)$ 是有理数域上的多项式, 则 $f(x)$ 在有理数域上无重因式当且仅当 $f'(x)$ 在复数域上无重根.

(4) 设不可约多项式 $p(x)$ 是 $f'(x)$ 的因式, 则 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的重因式.