



4. 方程组  $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 = 0 \end{cases}$ , 当  $\lambda =$  \_\_\_\_\_ 时, 方程组有非零解。

- A) 0                      B)  $\pm 1$                       C) 2                      D) 任意实数

5. 下列向量组中, \_\_\_\_\_ 是线性无关向量组。

- A) (1, 2), (-3, 0), (5, 1)                      B) (1, 1, 0), (0, 0, 3), (2, 2, 0)  
C) (2, 6, 0), (3, 9, 0), (0, 0, 2)                      D) (1, 1, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 3)

6. 对齐次线性方程组  $\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$  \_\_\_\_\_ 是它的一个基础解系。

- A)  $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$                       B)  $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$                       C)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$                       D)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

7. 当  $k =$  \_\_\_\_\_ 时, 方程组  $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ x_2 + 2x_3 = 2 \\ (k-1)(k-2)x_3 = (k-3)(k-4) \end{cases}$  无解。

- A) 2                      B) 3                      C) 4                      D) 5

8. 设向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  中是齐次线性方程组  $AZ = 0$  的一个基础解系, 则向量组 \_\_\_\_\_ 也是  $AZ = 0$  的一个基础解系。

- A)  $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$                       B)  $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3$   
C)  $2\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2$                       D)  $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2, \alpha_3$

9. 设  $A$  为  $m \times n$  矩阵, 秩  $(A) = m < n$ , 下列结论正确的是 \_\_\_\_\_。

- A) 齐次线性方程组  $AZ = 0$  只有零解                      B) 非齐次线性方程组  $AZ = b$  有无穷多解  
C)  $A$  中任一个  $m$  阶子式均不等于零                      D)  $A$  中任意  $m$  个列向量必线性无关。

10. 设  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  是齐次线性方程组  $Ax = 0$  的一个基础解系, 则 \_\_\_\_\_ 也是该方程组的一个基础解系。

- A) 可由  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  线性表示的向量组;                      B) 与  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  等秩的向量组  
C)  $\eta_1, \eta_1 + \eta_3, \eta_1 + \eta_2 + \eta_3$                       D)  $\eta_1 - \eta_2, \eta_2 - \eta_3, \eta_3 - \eta_1$

11. 设  $\xi_1, \xi_2$  是非齐次线性方程组  $Ax = b$  的两个不同解,  $\eta$  是齐次线性方程组  $Ax = 0$  的一个非零解, 则 \_\_\_\_\_。

- A) 向量组  $\xi_1 - \xi_2, \xi_1$  线性无关  
B) 向量组  $\xi_1 - \xi_2, \eta$  线性相关  
C)  $Ax = b$  的通解为  $\xi_1 + k\eta$ , 其中  $k$  为任意数  
D)  $Ax = b$  的通解为  $\xi_1 + s(\xi_1 - \xi_2) + t\eta$ , 其中  $s, t$  为任意数

12. 设  $A$  为  $m \times n$  矩阵, 秩  $(A) = r$ , 则下列结论中正确的是 \_\_\_\_\_。

- A)  $r = n$  时,  $Ax = b$  有唯一解                      B)  $m = n$  时,  $Ax = b$  有唯一解  
C)  $r < n$  时,  $Ax = b$  有无穷多解                      D)  $m = n$  时,  $Ax = b$  有解

13. 已知非齐次线性方程组的系数行列式为 0, 则 \_\_\_\_\_。

- A) 方程组有无穷多解                      B) 方程组无解  
C) 方程组有唯一解或无穷多解                      D) 方程组可能无解, 也可能有无穷多解

三、计算题 每小题 8 分, 共 40 分

1. 求向量组  $\alpha_1 = (-1, 0, 1, 0)$ ,  $\alpha_2 = (1, 1, 1, 1)$ ,  $\alpha_3 = (0, 1, 2, 1)$ ,  $\alpha_4 = (-1, 1, 3, 1)$  的秩, 并求其一个极大无关组。
2. 设有向量  $\alpha_1 = (1+t, 1, 1)$ ,  $\alpha_2 = (1, 1+t, 1)$ ,  $\alpha_3 = (1, 1, 1+t)$ ,  $\beta = (0, t, t^2)$ , 问  $t$  为何值时,
  - 1)  $\beta$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示, 且表达式唯一;
  - 2)  $\beta$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示, 且表达式不唯一;
  - 3)  $\beta$  不可由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示。

$$3. \text{ 对 } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 3 \\ b \end{pmatrix},$$

- 1)  $a, b$  为何值时, 方程组有解;
  - 2) 方程组有解时, 求导出组的一个基础解系;
  - 3) 方程组有解时, 求其通解。
4. 已知齐次线性方程组 (I) 为  $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$ , 齐次线性方程组 (II) 的一个基

$$\text{础解系为 } \xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ 求 (I), (II) 的公共解, 并指明该公共解如何由}$$

(I), (II) 的基础解系线性表示。

$$5. a, b, c, d \text{ 满足什么条件时, 方程组 } \begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0 \\ bx_1 - ax_2 + dx_3 - cx_4 = 0 \\ cx_1 - dx_2 - ax_3 + bx_4 = 0 \\ dx_1 + cx_2 - bx_3 - ax_4 = 0 \end{cases} \text{ 何时只有零解?}$$

四、证明题: 每题 8 分, 共 24 分

1.  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  是  $m$  个  $n$  维列向量, 且  $A$  是可逆的  $n$  阶矩阵。证明:

当  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性相关时,  $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_m$  也线性相关; 当  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性无关时,  $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_m$  也线性无关。

2. 设  $A$  是  $n$  阶方阵, 若存在  $n$  维列向量  $\alpha$  和正整数  $k$ , 使得  $A^k \alpha = 0, A^{k-1} \alpha \neq 0$ , 证明: 向量组  $\alpha, A\alpha, A^2\alpha, \dots, A^{k-1}\alpha$  线性无关。

3. 设  $A, B$  是  $n$  阶方阵, 且  $AB = 0$ , 则秩  $(A) + \text{秩}(B) \leq n$