



厦门大学 《高等代数 (II)》 课程试卷

数学、经济学院各系 2025 年级各专业

主考教师：杜妮、阮诗伶、陈继勇、林鹭

试卷类型：A 卷 考试日期：2026.6.18

一、单选题: (18 分, 每题 3 分, 共 6 题)

1. 设 V 是 n 维欧氏空间。对于任意 $x, y \in V$, 下列命题**错误**的是 ____。
 - A. $|x+y| \leq |x| + |y|$
 - B. $|x+y| = |x| + |y|$ 当且仅当 x, y 线性相关
 - C. $(x, y)^2 \leq (x, x)(y, y)$
 - D. $(x, y)^2 = (x, x)(y, y)$ 当且仅当 x, y 线性相关
2. 设 V_1, V_2 是 n 维欧氏空间 V 的子空间, 且 $V_1 \subseteq V_2$ 。记 $d = \dim V_1 + \dim V_2^\perp$ 。下列说法正确的是 ____。
 - A. d 可能等于 n
 - B. d 可能大于 n
 - C. d 一定小于 n
 - D. d 一定大于 n
3. 设 φ 是有限维欧氏空间 V 的对称变换, 则下列命题中正确的有 ____ 个。
 - (a) φ 的特征值全是实数;
 - (b) φ 在 V 的某个基下的矩阵是对角矩阵;
 - (c) φ 的属于不同特征值的特征向量必正交;
 - (d) 对任意 $X, Y \in V$, $(\varphi(X), Y) = (\varphi(Y), X)$ 。
 - A. 1
 - B. 2
 - C. 3
 - D. 4
4. 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2 - (x_3 - x_1)^2$ 的正惯性指数与负惯性指数依次为 ____。
 - A. 2, 0
 - B. 1, 1
 - C. 2, 1
 - D. 1, 2
5. 设 A 是 3 阶实对称矩阵, E 是 3 阶单位矩阵。若 $A^2 + A = 2E$, 且 $\det(A) = 4$, 则二次型 $X^T A X$ 的规范形为 ____。
 - A. $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$
 - B. $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$
 - C. $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$
 - D. $-y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$
6. 设 A 为 n 阶实对称矩阵, 且满足 A 与 $-A$ 合同, 则下列命题中**错误**的是 ____。
 - A. A 的秩一定是偶数
 - B. n 一定是偶数
 - C. A 的符号差为零
 - D. A 合同于 $-2A$

二、填空题: (18 分. 每题 3 分, 共 6 题)

1. 设 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 是欧氏空间 V 的一个正交基, 则 V 中向量 α 在这个基下的第 i 个坐标分量为 _____。
2. 设 A 为 4 阶正交矩阵, 且满足 A 的第 2 行第 3 列元素为 -1 。则方程组 $AX = (0, 1, 0, 0)^T$ 的解为 _____。
3. 设 $v = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^T$, $M = E_3 - 2vv^T$ 。则 M 的正交相似标准形为 _____。
4. 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ 的秩为 _____。
5. 设 A 是 5 阶实对称矩阵, 满足 $A^2 + 3A = O$, 且 $r(A) = 3$, 则 A 在 $\mathbb{C}$ 上的合同规范形是 _____; 在 $\mathbb{R}$ 上的合同规范形是 _____。
6. 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, 则使 $A + tE$ 正定的实数 t 的取值范围为 _____。

三、(12 分) 设 A 是 3 阶不可逆实对称矩阵, 且 $X_1 = (1, -2, 1)^T$, $X_2 = (-1, a, 1)^T$ 分别为 A 的属于特征值 $\lambda_1 = 1$ 和 $\lambda_2 = -1$ 的特征向量。

- (1) 求实数 a 及矩阵 A ;
- (2) 计算 $A^{2026}Y$, 其中 $Y = (1, 1, 1)^T$ 。

四、(12 分) 设实二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 5x_2^2 - 8x_2x_3 + 5x_3^2$$

经过正交线性替换 $X = QY$ 化为标准形

$$f = y_1^2 + y_2^2 + 10y_3^2.$$

- (1) 求常数 a ;
- (2) 求正交矩阵 Q 。

五、(12 分) 设 A 为 n 阶正交矩阵, 且 $A + E$ 可逆 (其中 E 为 n 阶单位矩阵)。

- (1) 求矩阵 A 的正交相似标准形;
- (2) 证明存在正交矩阵 B , 使得 $B^2 = A$ 。

六、(10 分) 设 A 是 n 阶实对称正定矩阵, B 是 $n \times m$ 实矩阵。证明: $B^T A B$ 正定的充要条件是 $r(B) = m$ 。

七、(10 分) 设 φ 是欧氏空间 V 上的一个反称变换, 即对任意的 $\alpha, \beta \in V$, 都有

$$(\varphi(\alpha), \beta) + (\alpha, \varphi(\beta)) = 0.$$

证明:

- (1) φ 是线性变换;
- (2) $\varphi - \text{id}_V$ 是可逆变换, 其中 id_V 是恒等变换;
- (3) $(\varphi + \text{id}_V)(\varphi - \text{id}_V)^{-1}$ 是正交变换。

八、(8 分) 设 A 为 n 阶实可逆对称矩阵, 证明: A 为正定矩阵的充要条件是对任意的正定矩阵 B 总有 $\text{tr}(AB) > 0$ 。