



厦门大学《高等代数(I)》课程试卷

数学,经济学院各,统计类,经济类系 2025 年级 各 专业

主考教师: 杜妮,阮诗隼,易少云,林鹭 试卷类型: A 卷 考试日期:

25.11.17

一、填空题: (18分. 每题3分, 共6题)

1.
$$\begin{vmatrix} 1 & & 2 \\ & 3 & 4 \\ & 5 & 6 \\ 7 & & 8 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}. \text{ 12}$$

2. 设 A 为 3 阶方阵, 且 $\det A = 2$, 则 $\det(A^{-1} + 2A^*) = \underline{\hspace{2cm}}$ (其中 A^* 是 A 的伴随矩阵). $\frac{125}{2}$

3. 设 $A = (a_{ij})$ 是 3 阶非零矩阵, A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式. 若 $a_{ij} + A_{ij} = 0$ ($i, j = 1, 2, 3$), 则 $\det A = \underline{\hspace{2cm}}. -1$

4. 设 A 为 n 阶方阵, 且 $A^2 = A$, 则 $(E + A)^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$. (用 A 表示) $E - \frac{1}{2}A$

5. 设向量组 $\alpha_1 = (1, 1, a, 1, a^2)^T$, $\alpha_2 = (1, 1, b, 1, b^2)^T$, $\alpha_3 = (1, 1, c, 1, c^2)^T$, 其中 a, b, c 两两互异, 则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ $\underline{\hspace{2cm}}$ (选填 “必” 或 “未必”) 线性无关. 必

6. 设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 为 4 阶方阵, 若 α_1, α_2 线性无关, 且 $\alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2$, $\alpha_4 = 3\alpha_1 + 4\alpha_2$, 则齐次线性方程组 $AX = 0$ 的通解为 $\underline{\hspace{2cm}}. k_1(3, 4, 0, -1)^T + k_2(1, 2, -1, 0)^T$, k_1, k_2 为任意数

二、单选题: (18分, 每题3分, 共6题)

1. 设 A, B 为 n 阶方阵, 则_____. **C**

(A) $(AB)^T = A^T B^T$

(B) $(AB)^{-1} = A^{-1} B^{-1}$

(C) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

(D) $\text{tr}(AB) = \text{tr}(A)\text{tr}(B)$

2. 设 A 为 n 阶方阵, 将 A 的第1行与第2行交换得 B , 再将 B 的第2列乘3得 C , 则 $C =$ _____. **C**

(A) $3E(1, 2)A$

(B) $3AE(1, 2)$

(C) $E(1, 2)AE(2(3))$

(D) $E(2(3))AE(1, 2)$

3. 设 A, B 为2阶矩阵, A^*, B^* 分别是 A, B 的伴随矩阵. 若 $\det A = 2, \det B = 5$, 则 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^*$ 为_____. **B**

(A) $\begin{pmatrix} O & 5B^* \\ 2A^* & O \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} O & 2B^* \\ 5A^* & O \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} O & 5A^* \\ 2B^* & O \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} O & 2A^* \\ 5B^* & O \end{pmatrix}$

4. 设 n 维列向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ ($m < n$)线性无关, 则 n 维列向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 线性无关的充要条件是_____. **D**(A) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 可由向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 线性表出(B) 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表出(C) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 与向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 等价(D) 矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ 与矩阵 $B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$ 相抵5. 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times m$ 矩阵, E 是 m 阶单位矩阵, 若 $AB = E$, 则_____. **D**(A) A 的列向量组线性无关, B 的列向量组线性无关(B) A 的行向量组线性无关, B 的行向量组线性无关(C) A 的列向量组线性无关, B 的行向量组线性无关(D) A 的行向量组线性无关, B 的列向量组线性无关6. 设 A, B 均为 n 阶方阵, 且满足 $A + B = AB$, 以下说法错误的是_____. **D**

(A) $A - E$ 可逆

(B) $r(A) = r(B)$

(C) $AB = BA$

(D) $\det A = \det B$

三、(12分) 当 a 取何值时下列线性方程组有无穷多解, 并写出其通解.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + (a+2)x_3 = 3 \\ x_1 + ax_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

解 对线性方程组的增广矩阵 $\bar{A}$ 施行行初等变换:

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 & 3 \\ 1 & a & -2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & a & 1 \\ 0 & a-2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & -1 \\ 0 & 0 & (a+1)(a-3) & a-3 \end{pmatrix}, \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1+2a & 3 \\ 0 & 1 & -a & -1 \\ 0 & 0 & (a+1)(a-3) & a-3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

从而 $r(\bar{A}) \geq 2$, 要使得原方程组有无穷多解, 则 $r(A) = r(\bar{A}) < 3$, 故 $r(A) = r(\bar{A}) = 2$. 据此, $(a+1)(a-3) = 0$ 且 $a-3 = 0$, 得到 $a = 3$.

将 $a = 3$ 代入, 得到原方程组有特解 $\gamma = (3, -1, 0)^T$, 导出组有基础解系 $\eta = (-7, 3, 1)^T$, 所以原方程组的全部解为 $\gamma + a\eta$, 其中 a 是 F 中的任意数.

注 这里的基础解系不唯一, 合理即可.

常见错误1 通解书写错误, 包括通解的形式混乱(通解=特解+ $a \times$ 基础解系, $a \in F$)和基础解系个数错误($n - r(A)$, 其中 n 是未知量的个数).

常见错误2 不会判断解存在的条件, 例如直接要求 $\det(A) = 0$, 或者解出 $a = -1$ 或 3 , 但未舍去 $a = -1$ 的情形.

常见错误3 矩阵初等变换中计算错误.

四、(12分) 设 A 为 n 阶方阵, 且满足 $A^2 = 2025A + 2026E$. 求实数 c_0, c_1 使得

$$r(A + c_0E) + r(A + c_1E) = n,$$

并证之.

证明 (法一) 由 $A^2 = 2025A + 2026E$ 可得, $(A - 2026E)(A + E) = 0$.

构造分块矩阵并进行初等变换:

$$\begin{pmatrix} A - 2026E & O \\ O & A + E \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A - 2026E & A - 2026E \\ O & A + E \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A - 2026E & -2027E \\ O & A + E \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} (A-2026E)(A+E) & -2027E \\ O & A+E \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} O & -2027E \\ O & A+E \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} O & E \\ O & O \end{pmatrix}$$

故

$$r(A-2026E) + r(A+E) = n$$

因此, $c_0 = 1, c_1 = -2026$ 或者 $c_0 = -2026, c_1 = 1$.

(法二) 因为 $(A-2026E)(A+E) = O$, 所以

$$r(A-2026E) + r(A+E) \leq n + r((A-2026E)(A+E)) = n.$$

又

$$n = r(-2027E) = r((A-2026E) - (A+E)) \leq r(A-2026E) + r(A+E)$$

即

$$n \leq r(A-2026E) + r(A+E)$$

故

$$r(A-2026E) + r(A+E) = n$$

因此, $c_0 = 1, c_1 = -2026$ 或者 $c_0 = -2026, c_1 = 1$.

(法三) 方程 $A^2 = 2025A + 2026E$ 是 A 的化零多项式, 即: $\lambda^2 - 2025\lambda - 2026 = O$. 解得特征值 $\lambda_1 = 2026, \lambda_2 = -1$.

由于最小多项式无重根, A 可对角化. 设特征值 2026 的代数重数为 r , 特征值 -1 的代数重数为 s , 则 $r + s = n$.

对于矩阵 $A - 2026E$, 特征值 2026 变为 0, 特征值 -1 变为 -2027, 故 $r(A - 2026E) = s$.

对于矩阵 $A + E$, 特征值 2026 变为 2027, 特征值 -1 变为 0, 故 $r(A + E) = r$.

因此

$$r(A - 2026E) + r(A + E) = s + r = n.$$

取 $c_0 = -2026, c_1 = 1$, 则有:

$$r(A + c_0E) + r(A + c_1E) = r(A - 2026E) + r(A + E) = n.$$

注 法三中用到特征值相关知识还未学到, 有部分同学使用这种方法.

常见错误1 法一中进行初等行变换时没有化到最终的 $\begin{pmatrix} O & E \\ O & O \end{pmatrix}$ 形式.

常见错误2 法二中 $(A - 2026E)(A + E) = O$ 不能得到 $A - 2026E = O$ 或者 $A + E = O$.

五、(12分) 设 A 为 n 阶方阵. 证明: A 不可逆的充要条件是存在非零对称矩阵 B 使得 $AB = O$.

证明 (充分性)

(法一) 假设 A 可逆, 则 $A^{-1}AB = B = O$, 与 B 是非零矩阵矛盾, 假设不成立, 故 A 不可逆.

(法二) 假设 A 可逆, 则 $r(A) = n$, 因为 $AB = O$, 所以

$$r(A) + r(B) \leq n \Rightarrow r(B) \leq 0 \Rightarrow r(B) = 0 \Rightarrow B = O,$$

与 B 是非零矩阵矛盾, 假设不成立, 故 A 不可逆.

(法三) 因为 $AB = O$, 所以 $r(A) + r(B) \leq n$. 由 $B \neq O$, 有 $r(B) \geq 1$, 从而 $r(A) \leq n - r(B) \leq n - 1 < n$, 故 A 不可逆.

(法四) 因为 B 是非零矩阵, 所以 B 存在非零列 β . 由 $AB = O$, 得 $A\beta = 0$, 即 β 是 $AX = 0$ 的非零解, 故 A 不可逆.

(必要性) (法一) 由 A 不可逆, 有 $r(A) = r < n$. 存在可逆矩阵 P, Q , 使得 $A = P \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q$.

令

$$B = Q^{-1} \begin{pmatrix} O & O \\ 0 & E_{n-r} \end{pmatrix} (Q^{-1})^T,$$

有 $AB = O, B^T = B$. 由于 $r < n, B \neq O$. 因此, 找到一个非零对称矩阵 B 使得 $AB = O$.

(法二) 由 A 不可逆, 得 $AX = 0$ 存在非零解, 记为 α .

令 $B = \alpha\alpha^T$, 则 $AB = A\alpha\alpha^T = O, B^T = B$, 且 $B \neq O$. 因此, 找到一个非零对称矩阵 B 使得 $AB = O$.

常见错误1 由 B 是非零矩阵推得 $\det B \neq 0$. 首先, B 不一定是方阵, 即使 B 是方阵, B 非零也不能推出 B 得行列式不等于0.

常见错误2 构造矩阵 B 时没有考虑 B 的对称性.

六、(10分) 设 A, B, C, D 均为 n 阶方阵, 满足 A 可逆. 证明:

$$(1) \det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A) \det(D - CA^{-1}B);$$

$$(2) \text{ 又若 } AB^T = BA^T, \text{ 则 } \det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD^T - BC^T).$$

证明 (1) (法一) 由于

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E & O \\ -CA^{-1} & E \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ O & D - CA^{-1}B \end{vmatrix} = |A| |D - CA^{-1}B|.$$

(法二) 也可以用列分块打洞:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \begin{vmatrix} E & -A^{-1}B \\ O & E \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ C & D - CA^{-1}B \end{vmatrix} = |A| |D - CA^{-1}B|.$$

(2) (法一) 由(1)可得

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A| |D - CA^{-1}B| = |A| |D^T - B^T(A^{-1})^T C^T| = |AD^T - AB^T(A^{-1})^T C^T|.$$

又因为 $AB^T = BA^T$, 所以进一步有

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD^T - BA^T(A^T)^{-1} C^T| = |AD^T - BC^T|.$$

(法二) 因为 A 可逆, 所以 A^T 也可逆. 利用(1)得

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{vmatrix} = |A^T| |D^T - B^T(A^T)^{-1} C^T| = |A| |D^T - B^T(A^T)^{-1} C^T| \\ &= |AD^T - AB^T(A^T)^{-1} C^T| = |AD^T - BA^T(A^T)^{-1} C^T| = |AD^T - BC^T|. \end{aligned}$$

(法三) 因为 A 可逆, 且 $AB^T = BA^T$, 所以

$$\begin{pmatrix} E & \\ -B & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & \\ & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^T & C^T \\ O & AD^T - BC^T \end{pmatrix}.$$

两边取行列式, 得

$$|A| \begin{vmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{vmatrix} = |A^T| |AD^T - BC^T| = |A| |AD^T - BC^T|.$$

结合 A 可逆, 即得

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{vmatrix} = |AD^T - BC^T|.$$

常见错误1 直接推出 $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - BC|$ 或者 $\begin{vmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{vmatrix} = |A^T D^T - B^T C^T|$.

常见错误2 认为 $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A^T & B^T \\ C^T & D^T \end{vmatrix}$.

常见错误3 假设 B 可逆.

七、(10分) 设 n 阶非零实方阵 A 满足 $A = kA^*$, 其中 $k \neq -1$, A^* 为 A 的伴随矩阵, 证明: A 可逆.

证明 反证法. 假设 A 不可逆.

首先, 由于 A 为非零方阵和 $A = kA^*$, 易知 $k \neq 0$ 且 A^* 为非零方阵. 进而, 由 $k \neq 0$ 和 $A = kA^*$, 我们有 $r(A) = r(A^*)$. 接下来, 回顾 $r(A)$ 和 $r(A^*)$ 之间的关系:

$$\begin{cases} r(A^*) = n & \text{当 } r(A) = n, \\ r(A^*) = 1 & \text{当 } r(A) = n-1, \\ r(A^*) = 0 & \text{当 } r(A) < n-1. \end{cases}$$

由 $r(A^*) > 0$, A 不可逆和 $r(A) = r(A^*)$, 我们有 $r(A^*) = 1$ 和 $r(A) = n-1$, 且二者相等, 即 $n = 2$. 因 A 为二阶方阵, 不妨设

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

其中 a, b, c, d 均为实数. 则

$$A^* = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

由 $A = kA^*$, 我们有

$$\begin{cases} a = kd \\ b = -kb \\ c = -kc \\ d = ka \end{cases}$$

由于 $k \neq -1$, 有 $b = c = 0$. 又由于 $\det A = 0$, 我们有

$$0 = ad - bc = a(ka) - 0 = ka^2.$$

因 $k \neq 0$, 故 $a = 0$, 进而 $d = 0$, 即 A 为零方阵, 与假设矛盾. 故 A 可逆.

常见错误1 未先说明 $k \neq 0$ 但把 k 当做除数.

常见错误2 对 $A = kA^*$ 两边取行列式后, 未考虑 $\det A$ 可能为0的情况, 直接计算出 $\det A$ 关于 k 的表达式. 如: 由于 $\det A = k^n(\det A)^{n-1}$, 所以 $\det A = k^{-n}$.

常见错误3 假设 $\det A = 0$ 后通过条件 $A = kA^*$ 和 $AA^* = (\det A)E$ 得到 $A^2 = O$ 便声称 $A = O$.

常见错误4 把条件 $A = kA^*$ 当做 $A^T = kA^*$, 从而通过 $AA^* = (\det A)E$ 证明 $\det A > 0$.

常见错误5 未考虑 $\det A$ 可能为0的情况, 直接用 A^* 写出 A^{-1} 的定义从而声称 A 可逆.

八、(8分) 设 A, B, C 分别是 $m \times n, t \times n$ 与 $n \times s$ 矩阵, 其中 C 的列向量是 $BX = 0$ 的基础解系. 证明:

(1) β 是 $AX = 0$ 与 $BX = 0$ 的公共解的充要条件是 $\beta = C\alpha$, 其中 α 是 $(AC)Y = 0$ 的解;

$$(2) r \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = r(AC) + r(B).$$

证明 (1) (充分性) 由 $\beta = C\alpha$, 从而 $A\beta = AC\alpha = 0$, 同时 $BC = 0$, 故 $B\beta = BC\alpha = 0$. 从而 β 是 $AX = 0$ 与 $BX = 0$ 的公共解.

(必要性) 设 $C = (C_1, C_2, \dots, C_s)$, 由 $B\beta = 0$ 以及 $C_1, C_2, \dots, C_s$ 是 $BX = 0$ 的基础解系, 可知存在 $a_1, a_2, \dots, a_s$, 使得 $\beta = a_1 C_1 + a_2 C_2 + \dots + a_s C_s = C\alpha$, 其中 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_s)^T$. 从而 $AC\alpha = 0$, 即 α 是 $(AC)Y = 0$ 的解.

(2) (法一) 容易知道

$$n - r \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} X = 0 \text{ 的解的极大无关组的个数} \right\}$$

以及

$$n - (r(AC) + r(B)) = s - r(AC) = \{ACY = 0 \text{ 的解的极大无关组的个数}\},$$

从而设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ 是 $ACY = 0$ 的基础解系, 则 $s - r(AC) = t$. 下证 $C\alpha_1, C\alpha_2, \dots, C\alpha_t$ 是 $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} X = 0$ 的基础解系即可.

一方面, 由(1)可知 $C\alpha_i$ 是解, 且由 C 列满秩, 可知 $C\alpha_1, \dots, C\alpha_t$ 线性无关.

另一方面, 若 β 满足 $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \beta = 0$, 则由(1)知 $\beta = C\alpha$, 其中 $AC\alpha = 0$. 从而 $\alpha = \sum_{i=1}^t a_i \alpha_i$, 从而 $\beta = C\alpha = \sum_{i=1}^t a_i C\alpha_i$. 证毕.

(法二) 注意到

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} (C \ E) = \begin{pmatrix} AC & A \\ O & B \end{pmatrix},$$

我们有

$$r \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \geq r \left(\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} (C \ E) \right) \geq r(AC) + r(B).$$

另一方面, 又注意到

$$r(AC) = r \left(\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} C \right) \geq r \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} + r(C) - n = r \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} - r(B).$$

我们得到反向不等式, 故证毕.

常见错误1 第(1)小问弄错必要性证明条件.

常见错误2 第(2)小问使用 C^{-1} 做初等变换, 使用不等式 $r\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \geq r(A+B)$ 等等.