



厦门大学《高等代数 (I)》课程试卷

数学,经济学院各,统计类,经济类系 2025 年级 各 专业

主考教师: 杜妮,阮诗隼,易少云,林鹭 试卷类型: A 卷 考试日期:
25.11.17

一、填空题: (18分. 每题3分, 共6题)

1.
$$\begin{vmatrix} 1 & & 2 \\ & 3 & 4 \\ & 5 & 6 \\ 7 & & 8 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

2. 设 A 为 3 阶方阵, 且 $\det A = 2$, 则 $\det(A^{-1} + 2A^*) = \underline{\hspace{2cm}}$ (其中 A^* 是 A 的伴随矩阵).

3. 设 $A = (a_{ij})$ 是 3 阶非零矩阵, A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式. 若 $a_{ij} + A_{ij} = 0$ ($i, j = 1, 2, 3$), 则 $\det A = \underline{\hspace{2cm}}.$

4. 设 A 为 n 阶方阵, 且 $A^2 = A$, 则 $(E + A)^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}.$ (用 A 表示)

5. 设向量组 $\alpha_1 = (1, 1, a, 1, a^2)^T$, $\alpha_2 = (1, 1, b, 1, b^2)^T$, $\alpha_3 = (1, 1, c, 1, c^2)^T$, 其中 a, b, c 两两互异, 则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ (选填 “必” 或 “未必”) 线性无关.

6. 设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 为 4 阶方阵, 若 α_1, α_2 线性无关, 且 $\alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2$, $\alpha_4 = 3\alpha_1 + 4\alpha_2$, 则齐次线性方程组 $AX = 0$ 的通解为 .

二、单选题: (18分, 每题3分, 共6题)

1. 设 A, B 为 n 阶方阵, 则_____.

(A) $(AB)^T = A^T B^T$

(B) $(AB)^{-1} = A^{-1} B^{-1}$

(C) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

(D) $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B)$

2. 设 A 为 n 阶方阵, 将 A 的第1行与第2行交换得 B , 再将 B 的第2列乘3得 C , 则 $C =$ _____.

(A) $3E(1, 2)A$

(B) $3AE(1, 2)$

(C) $E(1, 2)AE(2(3))$

(D) $E(2(3))AE(1, 2)$

3. 设 A, B 为2阶矩阵, A^*, B^* 分别是 A, B 的伴随矩阵. 若 $\det A = 2, \det B = 5$, 则 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^*$ 为_____.

(A) $\begin{pmatrix} O & 5B^* \\ 2A^* & O \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} O & 2B^* \\ 5A^* & O \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} O & 5A^* \\ 2B^* & O \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} O & 2A^* \\ 5B^* & O \end{pmatrix}$

4. 设 n 维列向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ ($m < n$)线性无关, 则 n 维列向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 线性无关的充要条件是_____.(A) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 可由向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 线性表出(B) 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表出(C) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 与向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 等价(D) 矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ 与矩阵 $B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$ 相抵5. 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times m$ 矩阵, E 是 m 阶单位矩阵, 若 $AB = E$, 则_____.(A) A 的列向量组线性无关, B 的列向量组线性无关(B) A 的行向量组线性无关, B 的行向量组线性无关(C) A 的列向量组线性无关, B 的行向量组线性无关(D) A 的行向量组线性无关, B 的列向量组线性无关6. 设 A, B 均为 n 阶方阵, 且满足 $A + B = AB$, 以下说法错误的是_____.

(A) $A - E$ 可逆

(B) $r(A) = r(B)$

(C) $AB = BA$

(D) $\det A = \det B$

三、(12分) 当 a 取何值时下列线性方程组有无穷多解, 并写出其通解.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + (a+2)x_3 = 3 \\ x_1 + ax_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

四、(12分) 设 A 为 n 阶方阵, 且满足 $A^2 = 2025A + 2026E$. 求实数 c_0, c_1 使得

$$r(A + c_0E) + r(A + c_1E) = n,$$

并证之.

五、(12分) 设 A 为 n 阶方阵. 证明: A 不可逆的充要条件是存在非零对称矩阵 B 使得 $AB = O$.

六、(10分) 设 A, B, C, D 均为 n 阶方阵, 满足 A 可逆. 证明:

$$(1) \det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A) \det(D - CA^{-1}B);$$

$$(2) \text{ 又若 } AB^T = BA^T, \text{ 则 } \det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD^T - BC^T).$$

七、(10分) 设 n 阶非零实方阵 A 满足 $A = kA^*$, 其中 $k \neq -1$, A^* 为 A 的伴随矩阵, 证明: A 可逆.

八、(8分) 设 A, B, C 分别是 $m \times n, t \times n$ 与 $n \times s$ 矩阵, 其中 C 的列向量是 $BX = 0$ 的基础解系. 证明:

(1) β 是 $AX = 0$ 与 $BX = 0$ 的公共解的充要条件是 $\beta = C\alpha$, 其中 α 是 $(AC)Y = 0$ 的解;

$$(2) r \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = r(AC) + r(B).$$