



厦门大学《高等代数（II）》课程试卷

数学,经济学院各,统计,大数据系 2024 年级各 专业

主考教师: 杜妮,阮诗隼,陈继勇,林鹭 试卷类型: A 卷 考试日期:
2025.06.16

一、填空题 (18分. 每题3分, 共6题)

1. 设 V 是欧氏空间, $\alpha, \beta \in V$, 若 $|(\alpha, \beta)| < |\alpha||\beta|$, 则 α, β _____ (选填 “线性无关” “线性相关”). 线性无关
2. 设标准内积空间 \mathbb{R}_4 的子空间 $U = \langle (1, 1, 1, 1), (1, 2, 2, 1) \rangle$, 则 _____ 是 U 的一个标准正交基.
 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$; 或 $(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}), (\frac{2}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}})$; 或 $(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0), \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})$
3. 设 A 是3阶非零实对称矩阵, 且满足 $\det A = \operatorname{tr} A = 0$, 则 A 在实数域上的规范形是 _____.
 $\operatorname{diag}(1, -1, 0)$
4. 设实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$, 则 f 的正惯性指数是 _____.
2
5. 6阶实对称矩阵全体按合同分类, 可以分成 _____ 类. 28
6. 设 n 阶实对称矩阵 $A = \begin{pmatrix} B & C \\ C^T & D \end{pmatrix}$, 其中 B 是 r 阶方阵. A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, B 的特征值为 $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r$, 则 $\min\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ _____ $\min\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r\}$ (选填 “ \leq ” “ \geq ”). \leq

二、单选题 (18分. 每题3分, 共6题)

1. 设 \mathbb{R}_2 是2维欧氏空间, 对任意两个向量 $X = (a, b), Y = (c, d)$, 定义内积为 $(X, Y) = ac + 2bd$, 则_____. **D**

(A) $(1, 1)$ 和 $(1, -1)$ 正交

(B) $(1, 0)$ 和 $(0, 1)$ 都是单位向量

(C) $(0, 1)$ 和 $(1, 1)$ 的夹角是 45°

(D) $(1, 0), (0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 是 V 的一个标准正交基

2. 设 U 和 W 都是欧氏空间 V 的子空间, $\alpha \in V$, 则_____. **A**

(A) $\alpha \perp (U + W)$ 的充要条件是 $\alpha \perp U$ 且 $\alpha \perp W$

(B) $\alpha \perp (U + W)$ 的充要条件是 $\alpha \perp U$ 或 $\alpha \perp W$

(C) $\alpha \perp (U \cap W)$ 的充要条件是 $\alpha \perp U$ 且 $\alpha \perp W$

(D) $\alpha \perp (U \cap W)$ 的充要条件是 $\alpha \perp U$ 或 $\alpha \perp W$

3. 设 φ 为有限维欧氏空间 V 的线性变换, 且 U 是 φ -子空间, 则下列命题正确的有_____个. **D**

a. 若 φ 为对称变换, 则 U^\perp 是 φ -子空间;

b. 若 φ 为正交变换, 则 U^\perp 是 φ -子空间;

c. 若 φ 为对称变换, 则 $\varphi|_U$ 是 U 的对称变换;

d. 若 φ 为正交变换, 则 $\varphi|_U$ 是 U 的正交变换.

(A) 1;

(B) 2;

(C) 3;

(D) 4.

4. _____可做为实二次型 $x_1^2 + 6x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_2x_3$ 的标准形. **D**

(A) $y_1^2 - y_2^2$;

(B) $y_1^2 + 4y_2^2$;

(C) $y_1^2 + 6y_2^2 - 2y_3^2$;

(D) $y_1^2 + 5y_2^2 + y_3^2$.

5. 设 A, B 是正定矩阵, 则_____是错误的. **D**

(A) $A + 2B$ 是正定矩阵

(B) $AB^{-1}A$ 是正定矩阵

(C) $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$ 是正定矩阵

(D) $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$ 是正定矩阵

6. 下列矩阵中, _____与 $\begin{pmatrix} 1 & \\ & -3 \end{pmatrix}$ 在实数域上合同. **B**

(A) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

三、(12分) 设 A 是3阶实对称矩阵, 1是 A 的2重特征值, 且 $A(1, 1, 1)^T = 0$, 求 A .

解 (法一) 由 $A(1, 1, 1)^T = 0$ 可知, 0为 A 的特征值, 1为 A 的2重特征值. (3 分)

设 $(a, b, c)^T$ 是 A 的属于特征值1的特征向量, 则其与 $(1, 1, 1)^T$ 正交, 即满足 $a + b + c = 0$. 其基础解系为 $(-1, 1, 0)^T, (-1, 0, 1)^T$ (4 分)

记 $\alpha_1 = (1, 1, 1)^T, \alpha_2 = (-1, 1, 0)^T, \alpha_3 = (-1, 0, 1)^T$.

将 α_2, α_3 Schmidt正交化可得:

$$\eta_2 = \alpha_2, \quad \eta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \eta_2)}{(\eta_2, \eta_2)} \eta_2 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)^T.$$

再单位化可得:

$$\gamma_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^T, \quad \gamma_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)^T, \quad \gamma_3 = \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)^T.$$

..... (3 分)

令 $Q = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)^T, \Sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 则 $Q^T A Q = \Sigma$, 因此,

$$A = Q \Sigma Q^T = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

..... (2 分)

(法二) 由题可知, A 的特征值为 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ (3 分)

由 A 实对称知存在正交矩阵 $Q = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 使得 $Q^{-1} A Q = Q^T A Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 其中 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 分别是特征值0, 1, 1的单位正交特征向量. (2 分)

因此可知:

$$A = Q \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Q^T = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \alpha_3^T \end{pmatrix} = \alpha_2 \alpha_2^T + \alpha_3 \alpha_3^T.$$

..... (3 分)

又 $Q Q^T = E$, 故 $\alpha_1 \alpha_1^T + \alpha_2 \alpha_2^T + \alpha_3 \alpha_3^T = E$ (2 分)

将 $(1, 1, 1)^T$ 单位化可得 $\alpha_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^T$(1 分)

因此

$$A = E - \alpha_1 \alpha_1^T = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

..... (1 分)

四、(10分) 设 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是复数域上 n 元二次型. 证明 f 的秩为 $2r$ 的充要条件是存在可逆线性替换 $X = CY$, 使得 $f = y_1 y_2 + y_3 y_4 + \dots + y_{2r-1} y_{2r}$.

证明 (法一) 必要性 若 f 秩为 $2r$, 则存在可逆线性替换 $X = BZ$, 使得 $f = z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_{2r}^2$.. (2 分)

令 $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{i}{2} & -\frac{i}{2} \end{pmatrix}$, 则 T 可逆. 做可逆线性替换 $Z = \text{diag}(T, T, \dots, T, E_{n-2r})Y$, 即 $X = B \text{diag}(T, T, \dots, T, E_{n-2r})Y$, 则 $f = y_1 y_2 + y_3 y_4 + \dots + y_{2r-1} y_{2r}$(3 分)

充分性 令 $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, 则 U 可逆. 做可逆线性替换 $Y = \text{diag}(U, U, \dots, U, E_{n-2r})S$, 则 $f = s_1^2 - s_2^2 + s_3^2 - s_4^2 + \dots + s_{2r-1}^2 - s_{2r}^2$ (2 分)

令 $V = \begin{pmatrix} 1 & \\ & i \end{pmatrix}$, 则 V 可逆. 做可逆线性替换 $S = \text{diag}(V, V, \dots, V, E_{n-2r})Z$, 即 $X = B \text{diag}(UV, UV, \dots, UV, E_{n-2r})Z$, 则 $f = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 + \dots + z_{2r-1}^2 + z_{2r}^2$(3 分)

(法二) 只要证明复二次型 $y_1 y_2 + y_3 y_4 + \dots + y_{2r-1} y_{2r}$ 的秩为 $2r$ 即可. 事实上, 因为 $y_1 y_2 + y_3 y_4 + \dots + y_{2r-1} y_{2r}$ 的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} S & & \\ & \ddots & \\ & & S \\ & & & O_{n-2r} \end{pmatrix}, \text{ 其中 } S = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

..... (5 分)

因为 A 有一个 $2r$ 阶子式 $\begin{vmatrix} S & & \\ & \ddots & \\ & & S \end{vmatrix} = (-1)^r \frac{1}{4^r} \neq 0$, 且所有 $r+1$ 阶子式全为0, 故 $y_1 y_2 + y_3 y_4 + \dots + y_{2r-1} y_{2r}$ 的秩为 $2r$. 命题得证. (5 分)

(法三) 只要证明复二次型 $y_1 y_2 + y_3 y_4 + \dots + y_{2r-1} y_{2r}$ 的秩为 $2r$ 即可. 事实上, 因为 $y_1 y_2 + y_3 y_4 + \dots + y_{2r-1} y_{2r}$ 的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} S & & \\ & \ddots & \\ & & S \\ & & & O_{n-2r} \end{pmatrix}, \text{ 其中 } S = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

..... (5 分)

对 S 做如下合同初等变换: 将 S 的第2列加到第1列, 再将第2行加到第1行; 然后将第1列乘 $-\frac{1}{2}$ 加到第2列, 再将第1行乘 $-\frac{1}{2}$ 加到第2行; 最后将第2列乘 $2i$, 再将第2行乘 $2i$, 得

$$S = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{i}{2} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

故 S 合同于 E_2 . 从而 A 合同于 $\text{diag}(E_{2r}, O_{n-2r})$, 从而 $y_1y_2 + y_3y_4 + \cdots + y_{2r-1}y_{2r}$ 的秩为 $2r$ (5 分)

五、(10分) 设 φ 为4维欧氏空间 V 上的正交线性变换. 证明: 若 φ 无实特征值, 则存在 V 的真子空间 U 和 W , 使得

$$V = U \oplus W,$$

其中 U, W 都是 φ -子空间, 且 $W = U^\perp$.

证明 (法一) 由已知, φ 为4维欧氏空间 V 上的正交线性变换且无实特征值, 因此 φ 的特征值都是复的且成对出现, 并存在 V 的标准正交基 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$, 使得 φ 在该基下的矩阵是

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & & \\ \sin \alpha & \cos \alpha & & \\ & & \cos \beta & -\sin \beta \\ & & \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}.$$

..... (6 分)

令 $U = \langle \xi_1, \xi_2 \rangle, W = \langle \xi_3, \xi_4 \rangle$, 则 $V = U \oplus W, U, W$ 都是 φ -子空间, 且 $W = U^\perp$ (4 分)

(法二) 设 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 是 V 的标准正交基, 正交线性变换 φ 在该基下的矩阵是 A , 则 A 是正交矩阵. (2 分)

由已知, φ 无实特征值, 因此 A 的特征值都是复的且成对出现, 并存在正交矩阵 Q , 使得

$$Q^{-1}AQ = Q^T A Q = D = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & & \\ \sin \alpha & \cos \alpha & & \\ & & \cos \beta & -\sin \beta \\ & & \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}.$$

..... (4 分)

令 $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)Q$, 则 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ 是 V 的一个标准正交基, 且 φ 在该基下的矩阵是 D . 令 $U = \langle \xi_1, \xi_2 \rangle, W = \langle \xi_3, \xi_4 \rangle$, 则 $V = U \oplus W, U, W$ 都是 φ -子空间, 且 $W = U^\perp$ (4 分)

六、(12分) 设 A 是实可逆矩阵, 证明:

(1) 存在正定矩阵 S 和正交矩阵 Q , 使得 $A = SQ$;

(2) A 可表示为(不超过)三个实对称矩阵的乘积.

证明 (1) (法一) (杨媛媛、尤奕林、李依菲、杨乐天、肖弼诚、赵语然、李墨涵、吴烨衡、谷依情、杨泽宇) 因为 A 实可逆, 所以 AA^T 正定, 存在正交矩阵 P , 使得 $AA^T = P^T \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)P$, 且 $\lambda_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$. 令 $S = P^T \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n})P, Q = S(A^T)^{-1}$, 可以断言 S, Q 为所求. 事实上, 直接计算易得 $AA^T = SS, A = SQ, S$ 是正定矩阵, 且由于

$$Q^T Q = A^{-1} S^T S (A^T)^{-1} = A^{-1} S S (A^T)^{-1} = A^{-1} A A^T (A^T)^{-1} = E,$$

所以 Q 为正交矩阵. (6 分)

(法二) (林科科, 孙浩源, 王敏, 王思远, 吴岳, 阎瑞) 因为 A 是实可逆矩阵, 有奇异值分解定理知, 存在正交矩阵 U, V 和正定对角矩阵 D , 使得 $A = UDV$, 令 $S = UDU^T, Q = UV$, 则 $A = SQ, S$ 是正定矩阵, Q 是正交矩阵.

(2) 因为 Q 是正交矩阵, 所以存在正交矩阵 K , 使得

$$K^T Q K = \begin{pmatrix} E_r & & & \\ & -E_s & & \\ & & K_1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & K_l \end{pmatrix}, K_i = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \end{pmatrix}, i = 1, 2, \dots, l.$$

..... (3 分)

(法一) (柯舒扬, 林杰) 因为

$$\begin{pmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \theta_i & \cos \theta_i \\ \cos \theta_i & \sin \theta_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix},$$

令 $B_i = \begin{pmatrix} -\sin \theta_i & \cos \theta_i \\ \cos \theta_i & \sin \theta_i \end{pmatrix}, C_i = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$, 则 $K_i = B_i C_i$. 令 $B = K^T \text{diag}(E_r, -E_s, B_1, \dots, B_l) K, C = K^T \text{diag}(E_r, E_s, C_1, \dots, C_l) K$, 则 $A = SBC$, 且 S, B, C 均为实对称矩阵. (3 分)

(法二) (郭佳辉, 郭永灿, 刘晨, 卢俊涛, 罗昊, 吴东兴, 汪管斌, 孙聿炀) 因为

$$\begin{pmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & \sin \theta_i \\ \sin \theta_i & -\cos \theta_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix},$$

令 $B_i = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & \sin \theta_i \\ \sin \theta_i & -\cos \theta_i \end{pmatrix}$, $C_i = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$, 则 $K_i = B_i C_i$. 其余同法一.

(法三) (李泽琪, 孙卓, 朱本然) 因为

$$\begin{pmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta_i}{2} & \sin \frac{\theta_i}{2} \\ \sin \frac{\theta_i}{2} & -\cos \frac{\theta_i}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta_i}{2} & -\sin \frac{\theta_i}{2} \\ -\sin \frac{\theta_i}{2} & -\cos \frac{\theta_i}{2} \end{pmatrix},$$

令 $B_i = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta_i}{2} & \sin \frac{\theta_i}{2} \\ \sin \frac{\theta_i}{2} & -\cos \frac{\theta_i}{2} \end{pmatrix}$, $C_i = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta_i}{2} & -\sin \frac{\theta_i}{2} \\ -\sin \frac{\theta_i}{2} & -\cos \frac{\theta_i}{2} \end{pmatrix}$, 则 $K_i = B_i C_i$. 其余同法一.

常见错误1 因为 A 实可逆, 所以 $A^T A$ 正定, 存在正定矩阵 S 使得 $A^T A = S^2$, 令 $Q = S^{-1} A^T$, 则为所求. 此时, SQ 等于 A^T 而不是 A .

常见错误2 因为 A 是实矩阵, 所以 A 相似对角矩阵.

常见错误3 因为 A 是实矩阵, 所以 A 合同对角矩阵.

七、(10分) (1) 设 E 是 n 阶方阵, 证明 $\begin{pmatrix} O & E \\ E & O \end{pmatrix}$ 的符号差为 0;

(2) 设 A 是 $m \times n$ 实矩阵, $\begin{pmatrix} O & A \\ A^T & O \end{pmatrix}$ 的符号差也为 0 吗? 若是, 请证明; 若否, 请举反例.

证明 (1) 记

$$A = \begin{pmatrix} & E_n \\ E_n & \end{pmatrix}.$$

(法一) 因为 $A^2 = E_{2n}$, 所以 A 的特征值 λ 满足 $\lambda^2 = 1$, 故 $\lambda = \pm 1$ (3 分)

又因为 $\text{tr}(A) = 0$, 所以 A 的特征值为 $1(n\text{重})$, $-1(n\text{重})$. 因此, A 的正、负惯性指数都是 n , 从而符号差为 0. (3 分)

(法二) 将 A 经如下合同变换

$$A = \begin{pmatrix} O & E_n \\ E_n & O \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2}E_n & E_n \\ E_n & O \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} E_n & E_n \\ E_n & O \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} E_n & O \\ E_n & -E_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} E_n & O \\ O & -2E_n \end{pmatrix}$$

化为 $\begin{pmatrix} E_n & O \\ O & -2E_n \end{pmatrix}$. 因此, A 的正、负惯性指数都是 n , 从而符号差为 0.

(法三) (李泽琪) 因为 A 特征多项式

$$f_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda E_n & -E_n \\ -E_n & \lambda E_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} O & (\lambda^2 - 1)E_n \\ -E_n & \lambda E_n \end{vmatrix} = (\lambda^2 - 1)^n.$$

故 A 的特征值为 $1(n\text{重})$, $-1(n\text{重})$. 因此, A 的正、负惯性指数都是 n , 从而符号差为 0 .

(法四) (吴念泽) 二次型 $f(X) = X^T A X = 2(x_1 x_{n+1} + x_2 x_{n+2} + \cdots + x_n x_{2n})$. 经过可逆线性替换

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_{n+1}, \\ x_{n+1} = y_1 - y_{n+1}, \\ \cdots \\ x_n = y_n + y_{2n}, \\ x_{2n} = y_n - y_{2n}. \end{cases}$$

可以化为

$$f(X) = 2(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 - y_{n+1}^2 - y_{n+2}^2 - \cdots - y_{2n}^2).$$

因此, A 的正、负惯性指数都是 n , 从而符号差为 0 .

(法五) (郑博弈) 设 A 的正、负惯性指数分别为 p, q . 由于

$$\begin{pmatrix} -E_n & \\ & E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & E_n \\ E_n & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -E_n & \\ & E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & -E_n \\ -E_n & \end{pmatrix},$$

即 A 合同于 $-A$, 因此 $p = q$, 从而符号差为 0 .

(2) 记

$$B = \begin{pmatrix} O & A \\ A^T & O \end{pmatrix}$$

B 的符号差也是 0(2分)

(法一) (刘厚哲, 吴源浩, 姜致远, 吴跃, 孔乐齐, 王敏睿) 设 $r(A) = r$, 则存在可逆矩阵 P, Q ,

使得 $A = PDQ$, 其中 $D = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$. 从而

$$\begin{pmatrix} O & A \\ A^T & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & PDQ \\ Q^T D^T P^T & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & O \\ O & Q^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & D \\ D^T & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P^T & O \\ O & Q \end{pmatrix}.$$

通过互换第二块行与第三块行, 同时互换第二块列与第三块列, 可知 $\begin{pmatrix} O & O & E_r & O \\ O & O & O & O \\ E_r & O & O & O \\ O & O & O & O \end{pmatrix}$ 合同于 $\begin{pmatrix} O & E_r & & \\ E_r & O & & \\ & & O_{2n-2r} & \end{pmatrix}$, 进而 $\begin{pmatrix} O & A \\ A^T & O \end{pmatrix}$ 合同于 $\begin{pmatrix} O & E_r & & \\ E_r & O & & \\ & & O_{2n-2r} & \end{pmatrix}$, 从而根据(1), 其符号差为0. (2分)

(法二) (樊君逸, 黄伟业, 卢俊涛, 罗昊, 施展, 孙浩元, 孙聿炀, 吴烨衡, 汪管斌, 尤奕林) B 的特征多项式

$$f_B(\lambda) = |\lambda E_{m+n} - B| = \begin{vmatrix} \lambda E_m & -A \\ -A^T & \lambda E_n \end{vmatrix}.$$

对于任意非零的 λ ,

$$f_B(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda E_m & -A \\ O & \lambda E_n - \frac{1}{\lambda} A^T A \end{vmatrix} = |\lambda E_m| \cdot |\lambda E_n - \frac{1}{\lambda} A^T A| = \lambda^{m-n} \cdot |\lambda^2 E_n - A^T A|.$$

设 $A^T A$ 的非零特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$. 则由于 $A^T A$ 半正定可知 $\lambda_i > 0 (1 \leq i \leq r)$. 从而

$$f_B(\lambda) = \lambda^{m+n-2r} (\lambda^2 - \lambda_1) \cdots (\lambda^2 - \lambda_r).$$

从而 B 的正、负特征值个数相同, 其符号差为0.

(法三) 同法二可知, B 的特征多项式

$$f_B(\lambda) = \lambda^{m-n} \cdot |\lambda^2 E_n - A^T A|.$$

记 $g(\lambda) = |\lambda^2 E_n - A^T A|$. 则 $f_B(\lambda)$ 与 $g(\lambda)$ 具有相同的非零根, 且 $g(\lambda)$ 是一个偶函数, 其正根与负根一一对应. 从而 B 的正、负特征值个数相同, 其符号差为0.

常见错误 初等变换的过程中, 出现 $\frac{1}{\lambda}$, 未说明 $\lambda \neq 0$.

八、(10分) 设 A, B 是半正定矩阵. 证明:

(1) $A + B$ 是半正定矩阵;

(2) 存在实可逆矩阵 P , 使得

$$P^T A P = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0); \quad P^T B P = \text{diag}(1 - \lambda_1, 1 - \lambda_2, \dots, 1 - \lambda_r, 0, \dots, 0),$$

其中 $r = r(A + B)$, $0 \leq \lambda_i \leq 1, i = 1, 2, \dots, r$;

(3) $\det(A+B) \geq \det A + \det B$, 且等号成立当且仅当 $A=O$ 或 $B=O$.

证明 (1) 因为 A, B 半正定, 所以 $A+B$ 是实对称矩阵, 且对任意 $X \in \mathbb{R}^n$, $X^T A X \geq 0$, $X^T B X \geq 0$, 从而 $X^T (A+B) X \geq 0$, 因此 $A+B$ 是半正定矩阵. (4 分)

(2) 只要证明存在实可逆矩阵 P , 使得

$$P^T(A+B)P = \text{diag}(1, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0), \quad P^T A P = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0).$$

其中 $r = r(A+B)$, $0 \leq \lambda_i \leq 1, i = 1, 2, \dots, r$.

因为 $A+B$ 半正定, 所以存在实可逆矩阵 C , 使得

$$C^T(A+B)C = \text{diag}(1, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0) = \begin{pmatrix} E_r & \\ & O \end{pmatrix}.$$

..... (1 分)

(法一) (汤诗翰, 吴烨衡) 又 A, B 半正定, 所以 $C^T A C = (a_{ij})_{n \times n}$, $C^T B C = (b_{ij})_{n \times n}$ 也是半正定矩阵, 它们的所有1阶主子式大于等于0, 所有2阶顺序主子式大于等于0.

从而对 $i > r$, 由 $a_{ii} + b_{ii} = 0$, 得 $a_{ii} = b_{ii} = 0$; 进一步2阶主子式 $\begin{vmatrix} a_{jj} & a_{ji} \\ a_{ji} & 0 \end{vmatrix} = -a_{ji}^2 \geq 0$, 从而 $a_{ji} = 0$, 同理 $b_{ji} = 0, j \neq i$ (2 分)

故 $C^T A C = \begin{pmatrix} A_{11} & O \\ O & O \end{pmatrix}$, $C^T B C = \begin{pmatrix} B_{11} & O \\ O & O \end{pmatrix}$, 其中 A_{11}, B_{11} 是 r 阶半正定矩阵.

对 A_{11} 存在正交矩阵 Q_1 , 使得 $Q_1^T A_{11} Q_1 = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$. 令 $P = C \text{diag}(P_1, E_{n-r})$, 则 P 可逆, 且

$$P^T(A+B)P = \text{diag}(1, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0), \quad P^T A P = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0).$$

从而 $P^T A P = \text{diag}(1 - \lambda_1, 1 - \lambda_2, \dots, 1 - \lambda_r, 0, \dots, 0)$.

注意到 $P^T A P$ 和 $P^T B P$ 均为半正定矩阵, 因此 $0 \leq \lambda_i \leq 1, i = 1, 2, \dots, r$ (1 分)

(法二) (郭佳辉, 杨媛媛) 记 $C^T A C = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$, 其为半正定矩阵, 存在实方阵 L , 使得 $C^T A C = L^T L$.

设 X_0 是 $A_{22} X = 0$ 的解, 则 $(0, X_0^T) L^T L \begin{pmatrix} 0 \\ X_0 \end{pmatrix} = (0, X_0^T) \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ X_0 \end{pmatrix} = X_0^T A_{22} X_0 = 0$, 所以 $L \begin{pmatrix} 0 \\ X_0 \end{pmatrix} = 0$, 故 $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ X_0 \end{pmatrix} = L^T L \begin{pmatrix} 0 \\ X_0 \end{pmatrix} = 0$, 即 $A_{12} X_0 = 0, A_{22} X_0 = 0$. 则 $A_{22} X_0 = 0$ 的解是 $\begin{pmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{pmatrix} X_0 = 0$ 的解. 又显然 $\begin{pmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{pmatrix} X_0 = 0$ 的解是 $A_{22} X_0 = 0$ 的解. 所以 $r(A_{22}) =$

$r \begin{pmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{pmatrix}$. A_{22} 实对称, $A_{12} = A_{21}^T$, 因此 $r(A_{22}) = r(A_{21}, A_{22})$. 所以存在 M , 使得 $A_{12} = MA_{22}$, 则 $A_{21} = A_{22}M^T$, 且

$$\begin{pmatrix} E_r & -M \\ & E_{n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_r & \\ -M^T & E_{n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \\ & A_{22} \end{pmatrix},$$

仍是半正定矩阵. 进而由半正定矩阵充要条件是所有主子式大于等于0, 因此 \tilde{A}_{11}, A_{22} 仍是半正定矩阵. 那么存在正交矩阵 Q_1, Q_2 , 使得

$$\begin{pmatrix} Q_1^T \\ & Q_2^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \\ & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 & \\ & Q_2 \end{pmatrix} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n), \lambda_i \geq 0 (1 \leq i \leq n).$$

令 $P = C \begin{pmatrix} E_r & \\ -M^T & E_{n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1^T \\ & Q_2^T \end{pmatrix}$, 则

$$P^T(A+B)P = \begin{pmatrix} E_r & \\ & O \end{pmatrix}, P^TAP = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r, \lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n).$$

进而 $P^TBP = \text{diag}(1 - \lambda_1, \dots, 1 - \lambda_r, -\lambda_{r+1}, \dots, -\lambda_n)$. 结合 P^TAP, P^TBP 半正定, 得 $0 \leq \lambda_i \leq 1 (1 \leq i \leq r)$, 且 $\lambda_i = 0 (r+1 \leq i \leq n)$.

(3) 由(2)知当 $r = n$ 时,

$$(\det P)^2 \det(A+B) = 1, (\det P)^2 \det A = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n, (\det P)^2 \det B = (1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2) \cdots (1 - \lambda_n).$$

显然

$$\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n + (1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2) \cdots (1 - \lambda_n) \leq \lambda_1 + (1 - \lambda_1) = 1.$$

$\det(A+B) \geq \det A + \det B$, 且等号成立当且仅当 $A = O$ 或 $B = O$ (2分)

常见错误1 因为 $P^T(A+B)P = \text{diag}(E_r, O)$, 所以 $P^TAP = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0)$.

常见错误2 由 $r(A_{11}, A_{12}) = r(A_{11})$, 得 $A_{12} = A_{11}M$. 令 $\begin{pmatrix} E_r & \\ -M^T & E_{n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_r & -M \\ & E_{n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & \\ & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix}$, 存在正交矩阵 Q_1, Q_2 , 使得 $\begin{pmatrix} Q_1^T \\ & Q_2^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & \\ & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 & \\ & Q_2 \end{pmatrix}$ 为对角矩阵. 令 $P = C \begin{pmatrix} E_r & -M \\ & E_{n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1^T \\ & Q_2^T \end{pmatrix}$, 则 $P^T(A+B)P = \begin{pmatrix} E_r & \\ & O \end{pmatrix}$. $P^T(A+B)P$ 未必等于 $\begin{pmatrix} E_r & \\ & O \end{pmatrix}$.

常见错误3 $\det(A+B) = \det A + \det B$.