



厦门大学《高等代数 (II)》课程试卷

数学,经济学院各,统计,大数据系 2024 年级各 专业

主考教师: 杜妮,阮诗隼,陈继勇,林鹭 试卷类型: A 卷 考试日期:
2025.06.16

一、填空题 (18分. 每题3分, 共6题)

1. 设 V 是欧氏空间, $\alpha, \beta \in V$, 若 $|(\alpha, \beta)| < |\alpha||\beta|$, 则 α, β _____ (选填 “线性无关” “线性相关”).
2. 设标准内积空间 \mathbb{R}_4 的子空间 $U = \langle (1, 1, 1, 1), (1, 2, 2, 1) \rangle$, 则 _____ 是 U 的一个标准正交基.
3. 设 A 是3阶非零实对称矩阵, 且满足 $\det A = \operatorname{tr} A = 0$, 则 A 在实数域上的规范形是 _____.
4. 设实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$, 则 f 的正惯性指数是 _____.
5. 6阶实对称矩阵全体按合同分类, 可以分成 _____ 类.
6. 设 n 阶实对称矩阵 $A = \begin{pmatrix} B & C \\ C^T & D \end{pmatrix}$, 其中 B 是 r 阶方阵. A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, B 的特征值为 $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r$, 则 $\min\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ _____ $\min\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r\}$ (选填 “ \leq ” “ \geq ”).

二、单选题 (18分. 每题3分, 共6题)

1. 设 \mathbb{R}_2 是2维欧氏空间, 对任意两个向量 $X = (a, b), Y = (c, d)$, 定义内积为 $(X, Y) = ac + 2bd$, 则_____.

(A) $(1, 1)$ 和 $(1, -1)$ 正交

(B) $(1, 0)$ 和 $(0, 1)$ 都是单位向量

(C) $(0, 1)$ 和 $(1, 1)$ 的夹角是 45°

(D) $(1, 0), (0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 是 V 的一个标准正交基

2. 设 U 和 W 都是欧氏空间 V 的子空间, $\alpha \in V$, 则_____.

(A) $\alpha \perp (U + W)$ 的充要条件是 $\alpha \perp U$ 且 $\alpha \perp W$

(B) $\alpha \perp (U + W)$ 的充要条件是 $\alpha \perp U$ 或 $\alpha \perp W$

(C) $\alpha \perp (U \cap W)$ 的充要条件是 $\alpha \perp U$ 且 $\alpha \perp W$

(D) $\alpha \perp (U \cap W)$ 的充要条件是 $\alpha \perp U$ 或 $\alpha \perp W$

3. 设 φ 为有限维欧氏空间 V 的线性变换, 且 U 是 φ -子空间, 则下列命题正确的有_____个.

a. 若 φ 为对称变换, 则 U^\perp 是 φ -子空间;

b. 若 φ 为正交变换, 则 U^\perp 是 φ -子空间;

c. 若 φ 为对称变换, 则 $\varphi|_U$ 是 U 的对称变换;

d. 若 φ 为正交变换, 则 $\varphi|_U$ 是 U 的正交变换.

(A) 1;

(B) 2;

(C) 3;

(D) 4.

4. _____可做为实二次型 $x_1^2 + 6x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_2x_3$ 的标准形.

(A) $y_1^2 - y_2^2$;

(B) $y_1^2 + 4y_2^2$;

(C) $y_1^2 + 6y_2^2 - 2y_3^2$;

(D) $y_1^2 + 5y_2^2 + y_3^2$.

5. 设 A, B 是正定矩阵, 则_____是错误的.

(A) $A + 2B$ 是正定矩阵

(B) $AB^{-1}A$ 是正定矩阵

(C) $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$ 是正定矩阵

(D) $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$ 是正定矩阵

6. 下列矩阵中, _____与 $\begin{pmatrix} 1 & \\ & -3 \end{pmatrix}$ 在实数域上合同.

(A) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

三、(12分) 设 A 是3阶实对称矩阵, 1是 A 的2重特征值, 且 $A(1, 1, 1)^T = 0$, 求 A .

四、(10分) 设 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是复数域上 n 元二次型. 证明 f 的秩为 $2r$ 的充要条件是存在可逆线性替换 $X = CY$, 使得 $f = y_1y_2 + y_3y_4 + \dots + y_{2r-1}y_{2r}$.

五、(10分) 设 φ 为4维欧氏空间 V 上的正交线性变换. 证明: 若 φ 无实特征值, 则存在 V 的真子空间 U 和 W , 使得

$$V = U \oplus W,$$

其中 U, W 都是 φ -子空间, 且 $W = U^\perp$.

六、(12分) 设 A 是实可逆矩阵, 证明:

- (1) 存在正定矩阵 S 和正交矩阵 Q , 使得 $A = SQ$;
- (2) A 可表示为(不超过)三个实对称矩阵的乘积.

七、(10分) (1) 设 E 是 n 阶方阵, 证明 $\begin{pmatrix} O & E \\ E & O \end{pmatrix}$ 的符号差为0;

(2) 设 A 是 $m \times n$ 实矩阵, $\begin{pmatrix} O & A \\ A^T & O \end{pmatrix}$ 的符号差也为0吗? 若是, 请证明; 若否, 请举反例.

八、(10分) 设 A, B 是半正定矩阵. 证明:

- (1) $A + B$ 是半正定矩阵;
- (2) 存在实可逆矩阵 P , 使得

$$P^TAP = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0); P^TBP = \text{diag}(1 - \lambda_1, 1 - \lambda_2, \dots, 1 - \lambda_r, 0, \dots, 0),$$

其中 $r = r(A + B)$, $0 \leq \lambda_i \leq 1, i = 1, 2, \dots, r$.