

厦门大学《高等代数 (II)》课程 试卷



数学,经济学院各系 2024 年级各专业

主考教师: 杜妮, 阮诗隼, 陈继勇, 林鹭 试卷类型: A 卷

考试日期: 2025.05.07

一、填空题: (18分. 每题3分, 共6题)

1. 设 A 的每行元素之和均为1, 则_____一定是 $A^3 + 2A - 3E$ 的特征值. 0

2. 若 $A = \begin{pmatrix} A_1 & \\ & A_2 \end{pmatrix}$, 且 $m_{A_1}(\lambda) = m_{A_2}(\lambda) = (\lambda - 1)^2$, 则 $m_A(\lambda) =$ _____. $(\lambda - 1)^2$

3. 设线性变换 φ 满足 $f_\varphi(\lambda) = \lambda^{2025}(\lambda - 1)^3$, $m_\varphi(\lambda) = \lambda^{2023}(\lambda - 1)$, 则 φ 的行列式因子有_____种可能? 2

4. 设实矩阵 A 的特征多项式为 $(\lambda^2 - \lambda + 1)^2$, 且 A 在复数域 \mathbb{C} 上不可对角化, 则 A 在

实数域 \mathbb{R} 上的广义Jordan标准形为_____ (要求具体到矩阵元素). $\begin{pmatrix} 0 & -1 & & \\ 1 & 1 & & \\ & & 1 & 0 & -1 \\ & & & 1 & 1 \end{pmatrix}$

5. 设 $A = \begin{pmatrix} F(\lambda^3) & \\ C & F(\lambda^3) \end{pmatrix}$, 其中 C 是元素全为1的3阶方阵, 则 A 的Jordan标准形

为_____. $J(0, 6) = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ 1 & 0 & & & & \\ & 1 & 0 & & & \\ & & 1 & 0 & & \\ & & & 1 & 0 & \\ & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$

6. 设 φ 是线性空间 V 的线性变换, 且在 V 的基 ξ_1, ξ_2, ξ_3 下的矩阵为 $\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

则 φ 的属于特征值2的特征子空间的维数是_____, 它的一组基是_____. 2; ξ_1, ξ_3

二、单选题: (18分. 每题3分, 共6题)

1. 设 A 是 n 阶矩阵, 线性方程组 $(E - A)X = 0$ 的两个不同解向量分别是 α, β , 则_____必是 A 对应于特征值1的特征向量. **D**

- (A) α (B) β
(C) $\alpha + \beta$ (D) $\alpha - \beta$

2. 设 A, B 是可逆矩阵, 且 A 与 B 相似, 则下列结论中错误的是_____. **C**

- (A) A 与 B^T 相似 (B) A^{-1} 与 B^{-1} 相似
(C) $A + A^T$ 与 $B + B^T$ 相似 (D) $A + A^{-1}$ 与 $B + B^{-1}$ 相似

3. 设 $A(\lambda), B(\lambda)$ 都是 n 阶 λ -矩阵, 下列叙述中错误的_____. **B**

- (A) $\deg(A(\lambda)B(\lambda)) \leq \deg A(\lambda) + \deg B(\lambda)$
(B) 若 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 相抵, 则 $A(\lambda)^2$ 与 $B(\lambda)^2$ 相抵
(C) 若 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 有相同的不变因子, 则 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 相抵
(D) 若 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 有相同的初等因子组, 则 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 未必相抵

4. 下列矩阵中不可对角化的是_____. **D**

- (A) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

5. 若 n 阶方阵 A 的极小多项式 $m_A(\lambda) = \lambda^3(\lambda - 1)$, 且 $r(A) = r$, $\text{tr}(A) = r - 3$, 则 A 的2阶Jordan块有_____个. **B**

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

6. 设复方阵 A 只有一个非1的行列式因子, 则下列结论正确的有_____个. **C**

- a. A 的特征子空间维数都等于1 b. A 的根子空间都是循环子空间
c. A 必可对角化 d. A 的初等因子两两互素
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

三、(12分) 设线性变换 $\varphi \in \mathfrak{L}(F^2)$ 满足 $\varphi((a,b)^T) = (a+b, a-b)^T$, 求 φ 的特征值、特征子空间和极小多项式.

解 由已知得 φ 在 F^2 的基 $\varepsilon_1 = (1,0)^T, \varepsilon_2 = (0,1)^T$ 下的矩阵 A 为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

φ 的特征值与 A 的特征值相同.

直接计算得 $f_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 \\ -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2$, 所以 A 的特征值为 $\sqrt{2}$ 和 $-\sqrt{2}$, 它们也是 φ 的特征值.

直接计算知 $(\sqrt{2}E - A)X = 0$ 的一个基础解系是 $(\sqrt{2}+1, 1)^T$, $(-\sqrt{2}E - A)X = 0$ 的一个基础解系是 $(\sqrt{2}-1, -1)^T$, 因此 $\sqrt{2}$ 的特征子空间为 $\langle(\sqrt{2}+1, 1)^T\rangle$, $-\sqrt{2}$ 的特征子空间为 $\langle(\sqrt{2}-1, -1)^T\rangle$.

(法一) 因为 φ 的特征值两两互异, 且都是1重的, 所以极小多项式等于特征多项式, 即 $\lambda^2 - 2$.

(法二) φ 的极小多项式与 A 的极小多项式相同. 因为 $A - \sqrt{2}E \neq O, A + \sqrt{2}E \neq O, A^2 - 2E = O$, 所以 $\lambda^2 - 2$ 是 A 的极小多项式, 也是 φ 的极小多项式.

注: $\sqrt{2}$ 的特征子空间为 $\langle(1, \sqrt{2}-1)^T\rangle$, $-\sqrt{2}$ 的特征子空间为 $\langle(-1, \sqrt{2}+1)^T\rangle$ 也是正确的.

常见错误 特征子空间计算错误.

四、(12分) 已知

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

分别在有理数域和复数域上讨论矩阵 A 是否可对角化? 并说明理由.

解 A 在有理数域上不可对角化, 在复数域上可对角化. 理由如下:

$$\text{设 } A \text{ 的特征多项式为 } f_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 3 \\ -1 & \lambda & -3 \\ 0 & -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \lambda^3 + \lambda^2 - 3\lambda + 2.$$

若 A 在有理数域上可对角化, 则 A 在有理数域上有3个有理特征值. 但 A 的所有可能有理特征值为 $\pm 1, \pm 2$, 直接计算知它们都不是 A 的特征值. 所以 A 在有理数域上不可对角化.

直接计算得

$$(f_A(\lambda), f'_A(\lambda)) = (\lambda^3 + \lambda^2 - 3\lambda + 2, 3\lambda^2 + 2\lambda - 3) = 1,$$

所以 $f_A(\lambda)$ 在复数域上没有重根, 因此 A 在复数域上可对角化.

又 A 是Frobenius矩阵, 则 A 的极小多项式 $m_A(\lambda) = f_A(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 - 3\lambda + 2$, A 的不变因子为 $1, 1, \lambda^3 + \lambda^2 - 3\lambda + 2$.

五、(12分) 设 A 是 n 阶方阵, λ_0 是 A 的 n 重特征值, $r(\lambda_0 E - A) = n - 1$.

(1) 求使 $(\lambda_0 E - A)^m = 0$ 的最小正整数 m (请说明理由);

(2) 证明: $(\lambda_0 E - A)^{n-1}$ 必有一个列向量是 A 的属于 λ_0 的特征向量.

证明 (1) 因为 λ_0 是 A 的 n 重特征值, $r(\lambda_0 E - A) = n - 1$, 所以特征值 λ_0 的代数重数为 n , 几何重数为1, A 的Jordan标准形中只有一个属于 λ_0 的Jordan块, 故存在可逆矩阵 P , 使得

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_0 & & & \\ & 1 & \lambda_0 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 1 & \lambda_0 \end{pmatrix} \doteq J.$$

注意到

$$(\lambda_0 E - A)^m = O \iff (\lambda_0 E - J)^m = O \iff (J - \lambda_0 E)^m = O,$$

而又有

$$J - \lambda_0 E = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

该矩阵的极小多项式为 $m(\lambda) = \lambda^n$, 故题目所求整数 $m = n$.

(2) (法一) 由(1)可知, $(\lambda_0 E - A)^{n-1} \neq O$, 所以 $(\lambda_0 E - A)^{n-1}$ 至少有一个非零列向量, 记为 α . 而又由 $(\lambda_0 E - A)^n = O$, 可得

$$(\lambda_0 E - A)(\lambda_0 E - A)^{n-1} = 0,$$

那么由矩阵乘法, 就得到

$$(\lambda_0 E - A)\alpha = 0,$$

此即说明 α 就是 A 的属于 λ_0 的特征向量.

(法二) 由(1)知, $r((A - \lambda_0)^{n-1}) = r((J - \lambda_0)^{n-1}) = 1$, 故可设

$$(A - \lambda_0 E)^{n-1} = (k_1 \alpha, k_2 \alpha, \dots, k_n \alpha),$$

其中 $\alpha \neq 0$, k_1, k_2, \dots, k_n 不全为0. 设 $k_i \neq 0$. 因为

$$(A - \lambda_0 E)(k_1 \alpha, k_2 \alpha, \dots, k_n \alpha) = (A - \lambda_0 E)(A - \lambda_0 E)^{n-1} = (A - \lambda_0 E)^n = O,$$

因此 $(A - \lambda_0 E)k_i \alpha = 0$, $k_i \alpha$ 是 $(A - \lambda_0 E)^{n-1}$ 的第 i 列, 为所求.

(法三) 记 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $P^{-1} = (p_{ij})_{n \times n}$. 由(1)知

$$(A - \lambda_0 E)^{n-1} = P(J - \lambda_0 E)^{n-1}P^{-1} = (p_{11}\alpha_n, p_{12}\alpha_n, \dots, p_{1n}\alpha_n).$$

因为 P 可逆, 所以 $\alpha_n \neq 0$, 存在 i , 使得 $p_{1i} \neq 0$, 且 $A(p_{1i}\alpha_n) = \lambda_n(p_{1i}\alpha_n)$, 故 $(A - \lambda_0 E)^{n-1}$ 的第 i 列为所求.

常见错误 1 (1)中未说明代数重数、几何重数和标准形的块数及块数大小.

常见错误 2 (2)中未说明 $(\lambda_0 E - A)^{n-1}$ 是非零的.

六、(10分) 设 n 阶矩阵 A 的特征值全为1, 求证: A 与 A^2 相似.

证明 由已知条件可得存在可逆矩阵 P , 使得

$$P^{-1}AP = \text{diag}(J(1, e_1), J(1, e_2), \dots, J(1, e_k)), e_1 + e_2 + \dots + e_k = n.$$

$$P^{-1}A^2P = \text{diag}(J(1, e_1)^2, J(1, e_2)^2, \dots, J(1, e_k)^2), e_1 + e_2 + \dots + e_k = n.$$

因此证明 A 与 A^2 相似等价于证明 $J(1, e)$ 与 $J(1, e)^2$ 相似.

(法一) $J(1, e)^2 = (E_e + J(0, e))^2$, 而

$$(E_e + J(0, e))^2 = E_e + 2J(0, e) + J(0, e)^2,$$

所以 $J(1, e)^2$ 是下三角矩阵, 主对角元均为1, 下次对角元为2, 故 $J(1, e)^2$ 的特征多项式为 $(\lambda - 1)^e$. 又因为 $J(0, e)^{e-1} = E_{e,1}$, $J(0, e)^e = O$, 其中 $E_{e,1}$ 为第 $(e, 1)$ 元为1, 其他元都是0的矩阵,

$$(J(1, e)^2 - E_e)^{e-1} = (2J(0, e) + J(0, e)^2 + J(0, e)^2)^{e-1} = 2^{e-1}J(0, e)^{e-1} \neq O,$$

所以 $J(1, e)^2$ 的极小多项式为 $(\lambda - 1)^e$. 因而 $J(1, e)^2$ 的不变因子为

$$1, \dots, 1(e-1 \text{ 个}), (\lambda - 1)^e,$$

初等因子组为 $(\lambda - 1)^e$, 与 $J(1, e)$ 的初等因子组相同, 故 $J(1, e)^2$ 相似于 $J(1, e)$.

(法二) 记 $S = J(1, e)^2$, 因为 $J(1, e)$ 的初等因子组为 $(\lambda - 1)^e$, 要证 S 相似于 $J(1, e)$, 只要证明 S 的初等因子组也是 $(\lambda - 1)^e$ 即可. 直接计算有

$$S = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ 2 & 1 & & & & \\ 1 & 2 & \ddots & & & \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

所以 $\lambda E_e - S$ 有一个 $e - 1$ 阶子式为

$$f(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & & & & & \\ -2 & \lambda - 1 & & & & \\ -1 & -2 & \ddots & & & \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \lambda - 1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & -2 & \lambda - 1 \end{pmatrix} = (\lambda - 1)^{e-1},$$

还有一个 $e - 1$ 阶子式

$$g(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -2 & \lambda - 1 & & & & \\ -1 & -2 & \lambda - 1 & & & \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -2 & \lambda - 1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & -2 & \end{pmatrix},$$

易见 $g(1) \neq 0$, 说明 $(f(\lambda), g(\lambda)) = 1$, 因此 $D_{e-1}(\lambda) = 1$, 故 $m_S(\lambda) = f_S(\lambda) = (\lambda - 1)^e$, 从而 S 的初等因子组为 $(\lambda - 1)^e$, 所以 S 相似于 $J(1, e)$.

(法三) 直接计算可得

$$J(1, e)^2 = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ 2 & 1 & & & & \\ 1 & 2 & \ddots & & & \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

因此 $e - r(E_e - J(1, e)^2) = 1$, 故 $J(1, e)^2$ 关于特征值 1 的几何重数是 1, 因此 $J(1, e)^2$ 相似于 $J(1, e)$.

常见错误 $J(1, e)^2 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

七、(12分) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(1) 求 A 的 Jordan 标准形;

(2) 设 $B = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$, 求 B 的 Jordan 标准形.

证明 (1) (法一) $\lambda E - A = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & & \\ -1 & \lambda & -1 \\ & -1 & \lambda \end{pmatrix}$, 直接计算可知 $\lambda E - A$ 有一个 2 阶子

式为 1, 且 $\det(\lambda E - A) = (\lambda + 1)(\lambda - 1)^2$. 因此 A 的行列式因子为 $1, 1, (\lambda + 1)(\lambda - 1)^2$.

初等因子组为 $\lambda + 1, (\lambda - 1)^2$. 进而 A 的 Jordan 标准形为 $\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(法二) 对 A 的特征矩阵做初等变换

$$\begin{aligned} \lambda E - A &= \begin{pmatrix} \lambda - 1 & & \\ -1 & \lambda & -1 \\ & -1 & \lambda \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda - 1 & & \\ -1 & \lambda & \lambda^2 - 1 \\ & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda - 1 & & \\ -1 & 0 & \lambda^2 - 1 \\ & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} \lambda - 1 & & \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda^2 - 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & (\lambda + 1)(\lambda - 1)^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda^2 - 1 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & (\lambda + 1)(\lambda - 1)^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda + 1)(\lambda - 1)^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

因此 A 的初等因子组为 $\lambda + 1, (\lambda - 1)^2$, 进而 A 的 Jordan 标准形为 $\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(2) (法一) (吴伟鸿, 尤奕林 等)

$$\begin{aligned}\lambda E - B &= \begin{pmatrix} \lambda E - A & -A \\ -A & \lambda E - A \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda E & -\lambda E \\ -A & \lambda E - A \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} \lambda E & O \\ -A & \lambda E - 2A \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda E & O \\ -\frac{1}{2}\lambda E & \lambda E - 2A \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda E & O \\ O & \lambda E - 2A \end{pmatrix}\end{aligned}$$

结合(1)得 B 的初等因子组为 $\lambda, \lambda, \lambda, \lambda + 2, (\lambda - 2)^2$, 故 B 的Jordan标准形为

$$\text{diag}(J(0, 1), J(0, 1), J(0, 1), J(-2, 1), J(2, 2)),$$

即

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & -2 & \\ & & & & 2 \\ & & & & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(法二) (李宇健, 刘启鹏, 那瀚文, 汪管斌 等) 直接计算得 $f_B(\lambda) = \lambda^3(\lambda + 2)(\lambda - 2)^2$. 因此 B 的特征值为0(3重), -2 (1重), 2 (2重). 又因为 $6 - r(B) = 3$, $6 - r(-2E - B) = 1$, $6 - r(2E - B) = 1$, 因此特征值0对应的Jordan块有3个, -2 对应的Jordan块只有1块, 2 对应的Jordan块只有1块, 从而 B 的Jordan标准形为

$$\text{diag}(J(0, 1), J(0, 1), J(0, 1), J(-2, 1), J(2, 2)).$$

(法三) (王敏, 魏震源, 吴东兴) 因为

$$\begin{pmatrix} E & \\ -E & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & \\ E & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2A & A \\ O & O \end{pmatrix},$$

所以 B 相似于 $\begin{pmatrix} 2A & A \\ O & O \end{pmatrix} \doteq C$. $f_B(\lambda) = \lambda^3(\lambda + 2)(\lambda - 2)^2$. 又因为 $r(C) = 3$, 所以含初等因子 $\lambda, \lambda, \lambda$. $r(2E - C) = 5$, 只含一个Jordan块 $J(2, 2)$. 故 B 的Jordan标准形为

$$\text{diag}(J(0, 1), J(0, 1), J(0, 1), J(-2, 1), J(2, 2)).$$

(法四) (樊君逸, 刘亚辉, 孙卓, 吴烨衡) 因为

$$\begin{pmatrix} E & \\ \frac{1}{2}E & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & -E \\ & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & E \\ E & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & \\ -\frac{1}{2}E & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & \\ & 2A \end{pmatrix},$$

所以 B 相似于 $\begin{pmatrix} O & \\ & 2A \end{pmatrix}$. 结合(1), 得 B 的Jordan标准形为

$$\text{diag}(J(0, 1), J(0, 1), J(0, 1), J(-2, 1), J(2, 2)).$$

(法五) (吴岳) 直接计算得 $f_B(\lambda) = \lambda^3(\lambda + 2)(\lambda - 2)^2$. 因为

$$B(B + 2E)(B - 2E) \neq O, B(B + 2E)(B - 2E)^2 = O,$$

结合极小多项式和特征多项式的关系, 即得 $m_B(\lambda) = \lambda(\lambda + 2)(\lambda - 2)^2$. 从而 B 的初等因子组为 $\lambda, \lambda, \lambda, \lambda + 2, (\lambda - 2)^2$, 因此 B 的Jordan标准形为

$$\text{diag}(J(0, 1), J(0, 1), J(0, 1), J(-2, 1), J(2, 2)).$$

常见错误1 直接由 $\begin{pmatrix} \lambda E & O \\ -A & \lambda E - 2A \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda E & O \\ O & \lambda E - 2A \end{pmatrix}$.

常见错误2 因为 $B^2 = 2 \begin{pmatrix} \lambda A^2 & A^2 \\ A^2 & A^2 \end{pmatrix}$, $B^3 = 4 \begin{pmatrix} \lambda A^3 & A^3 \\ A^3 & A^3 \end{pmatrix}$, $B^4 = 8 \begin{pmatrix} \lambda A^4 & A^4 \\ A^4 & A^4 \end{pmatrix}$.
 $B^4 - 2B^3 - 4B + 8E = 0$, 所以 $m_B(\lambda) = \lambda(\lambda + 2)(\lambda - 2)^2$. 还要证明次数小于4的多项式不是 B 的零化多项式或 $B(B + 2E)(B - 2E) \neq O$.

八、(6分) 证明: 任何一个实方阵均可表示为两个对称实矩阵的乘积, 其中至少有一个矩阵可逆.

证明 (程嘉禾, 樊君逸, 罗昊, 杨泽宇, 余钧) 设实方阵 A 在 \mathbb{R} 上的初等因子组为

$$(\lambda - a_1)^{k_1}, \dots, (\lambda - a_s)^{k_s}, ((\lambda - b_1)^2 + c_1^2)^{l_1}, \dots, ((\lambda - b_t)^2 + c_t^2)^{l_t}.$$

其中 $a_i, b_j, c_j \in \mathbb{R}$, 且 $c_j \neq 0, i = 1, 2, \dots, s; j = 1, 2, \dots, t$. 因此存在实可逆矩阵 P , 使得

$$P^{-1}AP = \text{diag}(J((\lambda - a_1)^{k_1}), \dots, J((\lambda - a_s)^{k_s}), J(((\lambda - b_1)^2 + c_1^2)^{l_1}), \dots, J(((\lambda - b_t)^2 + c_t^2)^{l_t})).$$

(1) 对 $i = 1, 2, \dots, s$,

$$J((\lambda - a_i)^{k_i}) = \begin{pmatrix} a_i & & & \\ & 1 & a_i & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 1 & a_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & a_i & \\ & & a_i & 1 \\ & \dots & \dots & \\ a_i & 1 & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & \dots & & \\ 1 & & & \end{pmatrix} \doteq B_i C_i.$$

(2) 对 $j = 1, 2, \dots, t$, 我们首先证明 $J(((\lambda - b_j)^2 + c_j^2)^{l_j})$ 相似于

$$U_j = \begin{pmatrix} b_j & -c_j & & & & \\ c_j & b_j & & & & \\ & & 1 & b_j & -c_j & \\ & & & c_j & b_j & \\ & & & & 1 & \ddots \\ & & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & & 1 & b_j & -c_j \\ & & & & & & & c_j & b_j \end{pmatrix}.$$

事实上, 一方面, $J(((\lambda - b_j)^2 + c_j^2)^{l_j})$ 的初等因子组为 $((\lambda - b_j)^2 + c_j^2)^{l_j}$.

另一方面, U_j 左下角的 $2l_j - 1$ 阶子式为 $b_j^{l_j} \neq 0$. 由分块下三角行列式性质得 U_j 的特征多项式 $f_{U_j}(\lambda) = ((\lambda - b_j)^2 + c_j^2)^{l_j}$, 因此 U_j 的行列式因子为 $1, 1, \dots, ((\lambda - b_j)^2 + c_j^2)^{l_j}$, 不变因子为 $1, 1, \dots, ((\lambda - b_j)^2 + c_j^2)^{l_j}$, 初等因子组为 $((\lambda - b_j)^2 + c_j^2)^{l_j}$. 这就证明了 $J(((\lambda - b_j)^2 + c_j^2)^{l_j})$ 相似于 U_j . 从而存在实可逆矩阵 Q_j , 使得 $Q_j^{-1}J(((\lambda - b_j)^2 + c_j^2)^{l_j})Q_j = U_j$.

其次,

$$U_j = \begin{pmatrix} & & & & -c_j & b_j \\ & & & & b_j & c_j \\ & & & -c_j & b_j & 1 \\ & & & b_j & c_j & \\ & & \dots & 1 & & \\ & \dots & \dots & & & \\ -c_j & b_j & 1 & & & \\ b_j & c_j & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & & & & 1 \\ & & & & 1 & \\ & & & 1 & & \\ & & 1 & & & \\ & \dots & & & & \\ 1 & & & & & \\ 1 & & & & & \end{pmatrix} \doteq V_j W_j$$

令

$$B = P \operatorname{diag}(B_1, \dots, B_s, Q_1 V_1 Q_1^T, \dots, Q_t V_t Q_t^T) P^T,$$

$$C = (P^{-1})^T \operatorname{diag}(C_1, \dots, C_s, (Q_1^{-1})^T W_1 Q_1^{-1}, \dots, (Q_t^{-1})^T W_t Q_t^{-1}) P^{-1},$$

则 B, C 是实对称矩阵, C 可逆, 且 $A = BC$.

常见错误

$$\begin{aligned}
& J((\lambda^2 + b\lambda + c)^l) \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -c & & & & \\ 1 & -b & & & & \\ & 1 & 0 & -c & & \\ & & 1 & -b & & \\ & & & 1 & \ddots & \\ & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & 1 & 0 & -c \\ & & & & & & 1 & -b \\ & & & & & & & -c & 0 \\ & & & & & & & -b & 1 \\ & & & & & & & & -c & 0 & 1 \\ & & & & & & & & -b & 1 \\ & & & & & & & & & \dots & 1 \\ & & & & & & & & & & \dots & \dots \\ & & & & & & & & & & & -c & 0 & 1 \\ & & & & & & & & & & & -b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & & & & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & & & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & & & & & & & & & & & 1 \\ & 1 \\ & 1 \\ & 1 \end{pmatrix} \doteq V_j W_j
\end{aligned}$$

则 V_j, W_j 实对称. V_j 不对称.

附加题 (10分) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2025 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2025 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 问是否存在矩阵 C 及复系数多项式 $f(x), g(x)$, 使得 $A = f(C), B = g(C)$? 请说明理由.

解 (郭佳辉, 姜致远, 罗昊, 肖弼诚) 不存在.

反证法. 若结论成立, 可设 $\deg f(x), \deg g(x) \leq 2$. 否则, 由 $f(x), g(x)$, 并利用 C 的极小多项式 $m_C(\lambda)$ 做带余除法, 再取相应的余式作为 $f(x), g(x)$. 以下就 C 互异特征值个数, 分三种情况讨论.

情形1. C 有三个互异特征值. 此时 C 可对角化, 从而 $A = f(C)$ 与 $B = g(C)$ 均可对角化, 与 A, B 不可对角化矛盾.

情形2. C 有两个互异特征值 λ_1, λ_2 . 因为 $f(\lambda_i), g(\lambda_i)$ 分别是 A, B 的特征值, 所以 $f(\lambda_i) = g(\lambda_i) = 0, i = 1, 2$. 即 $f(\lambda) = a(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2), g(\lambda) = b(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$, 其中 $a \neq b$, 因此得 $f(\lambda) = \frac{a}{b}g(\lambda)$, 从而 $A = \frac{a}{b}B$, 矛盾.

情形3. C 仅有一个互异特征值 λ_0 , 且 $m_C(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^2$. 此时可设 $f(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$,

且 C 相似于 $\begin{pmatrix} \lambda_0 & & \\ 1 & \lambda_0 & \\ & 1 & \lambda_0 \end{pmatrix}$, 则 $f(C)$ 相似于

$$\begin{pmatrix} f(\lambda_0) & & \\ f'(\lambda_0) & f(\lambda_0) & \\ k & f'(\lambda_0) & f(\lambda_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & \\ f'(\lambda_0) & 0 & \\ k & f'(\lambda_0) & 0 \end{pmatrix}.$$

因为 $r(A) = 1$, 所以 $f'(\lambda_0) = 0$, 因此 $f(\lambda) = a(\lambda - \lambda_0)^2$, 其中 $a \neq 0$. 同理, $g(\lambda) = b(\lambda - \lambda_0)^2$, 其中 $b \neq 0$. 因此 $f(\lambda) = \frac{a}{b}g(\lambda)$, 从而 $A = \frac{a}{b}B$, 矛盾.