

# 厦门大学《高等代数（II）》课程 试卷



数学,经济学院各系 2024 年级各专业

主考教师: 杜妮, 阮诗隼, 陈继勇, 林鹭 试卷类型: A 卷

考试日期: 2025.05.07

一、填空题: (18分. 每题3分, 共6题)

1. 设 $A$ 的每行元素之和均为1, 则\_\_\_\_\_一定是 $A^3 + 2A - 3E$ 的特征值.

2. 若 $A = \begin{pmatrix} A_1 & \\ & A_2 \end{pmatrix}$ , 且 $m_{A_1}(\lambda) = m_{A_2}(\lambda) = (\lambda - 1)^2$ , 则 $m_A(\lambda) =$ \_\_\_\_\_.

3. 设线性变换 $\varphi$ 满足 $f_\varphi(\lambda) = \lambda^{2025}(\lambda - 1)^3$ ,  $m_\varphi(\lambda) = \lambda^{2023}(\lambda - 1)$ , 则 $\varphi$ 的行列式因子有\_\_\_\_\_种可能?

4. 设实矩阵 $A$ 的特征多项式为 $(\lambda^2 - \lambda + 1)^2$ , 且 $A$ 在复数域 $\mathbb{C}$ 上不可对角化, 则 $A$ 在实数域 $\mathbb{R}$ 上的广义Jordan标准形为\_\_\_\_\_ (要求具体到矩阵元素).

5. 设 $A = \begin{pmatrix} F(\lambda^3) & \\ C & F(\lambda^3) \end{pmatrix}$ , 其中 $C$ 是元素全为1的3阶方阵, 则 $A$ 的Jordan标准形为\_\_\_\_\_.

6. 设 $\varphi$ 是线性空间 $V$ 的线性变换, 且在 $V$ 的基 $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ 下的矩阵为 $\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & 1 & 2 \end{pmatrix}$ , 则 $\varphi$ 的属于特征值2的特征子空间的维数是\_\_\_\_\_, 它的一组基是\_\_\_\_\_.

## 二、单选题: (18分. 每题3分, 共6题)

1. 设 $A$ 是 $n$ 阶矩阵, 线性方程组 $(E - A)X = 0$ 的两个不同解向量分别是 $\alpha, \beta$ , 则\_\_\_\_\_必是 $A$ 对应于特征值1的特征向量.

- (A)  $\alpha$  (B)  $\beta$   
(C)  $\alpha + \beta$  (D)  $\alpha - \beta$

2. 设 $A, B$ 是可逆矩阵, 且 $A$ 与 $B$ 相似, 则下列结论中错误的是\_\_\_\_\_.

- (A)  $A$ 与 $B^T$ 相似 (B)  $A^{-1}$ 与 $B^{-1}$ 相似  
(C)  $A + A^T$ 与 $B + B^T$ 相似 (D)  $A + A^{-1}$ 与 $B + B^{-1}$ 相似

3. 设 $A(\lambda), B(\lambda)$ 都是 $n$ 阶 $\lambda$ -矩阵, 下列叙述中错误的\_\_\_\_\_.

- (A)  $\deg(A(\lambda)B(\lambda)) \leq \deg A(\lambda) + \deg B(\lambda)$   
(B) 若 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 相抵, 则 $A(\lambda)^2$ 与 $B(\lambda)^2$ 相抵  
(C) 若 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 有相同的不变因子, 则 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 相抵  
(D) 若 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 有相同的初等因子组, 则 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 未必相抵

4. 下列矩阵中不可对角化的是\_\_\_\_\_.

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$  (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$  (C)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$  (D)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

5. 若 $n$ 阶方阵 $A$ 的极小多项式 $m_A(\lambda) = \lambda^3(\lambda - 1)$ , 且 $r(A) = r$ ,  $\text{tr}(A) = r - 3$ , 则 $A$ 的2阶Jordan块有\_\_\_\_\_个.

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

6. 设复方阵 $A$ 只有一个非1的行列式因子, 则下列结论正确的有\_\_\_\_\_个.

- a.  $A$ 的特征子空间维数都等于1 b.  $A$ 的根子空间都是循环子空间  
c.  $A$ 必可对角化 d.  $A$ 的初等因子两两互素  
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

三、(12分) 设线性变换 $\varphi \in \mathcal{L}(F^2)$ 满足 $\varphi((a,b)^T) = (a+b, a-b)^T$ , 求 $\varphi$ 的特征值、特征子空间和极小多项式.

四、(12分) 已知

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

分别在有理数域和复数域上讨论矩阵 $A$ 是否可对角化? 并说明理由.

五、(12分) 设 $A$ 是 $n$ 阶方阵,  $\lambda_0$ 是 $A$ 的 $n$ 重特征值,  $r(\lambda_0 E - A) = n - 1$ .

(1) 求使 $(\lambda_0 E - A)^m = 0$ 的最小正整数 $m$ (请说明理由);

(2) 证明:  $(\lambda_0 E - A)^{n-1}$ 必有一个列向量是 $A$ 的属于 $\lambda_0$ 的特征向量.

六、(10分) 设 $n$ 阶矩阵 $A$ 的特征值全为1, 求证:  $A$ 与 $A^2$ 相似.

七、(12分) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

(1) 求 $A$ 的Jordan标准形;

(2) 设 $B = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$ , 求 $B$ 的Jordan标准形.

八、(6分) 证明: 任何一个实方阵均可表示为两个对称实矩阵的乘积, 其中至少有一个矩阵可逆.

附加题 (10分) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2025 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2025 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , 问是否存在矩阵 $C$ 及复系数多项式 $f(x), g(x)$ , 使得 $A = f(C)$ ,  $B = g(C)$ ? 请说明理由.