



厦门大学《高等代数 (II)》课程试卷

数学,经济学院各,统计,邹院系 2023,2022 年级各 专业

主考教师: 杜妮,林鹭,阮诗隼,陈继勇 试卷类型: A 卷 考试日期:

2024.06.18

一、填空题 (18分. 每题3分, 共6题)

1. 设欧氏空间 \mathbb{R}^2 上的内积定义为 $(X, Y) = X^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} Y$, 则向量 $(1, 1)^T$ 的长度为_____.

$\sqrt{3}$

2. 设实对称矩阵 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ 正交相似于 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$, 则 $a =$ _____, $\lambda_2 =$ _____,
 $\lambda_1 =$ _____. $-1; 2; -2$ 或 $-1; -2; 2$

3. 设10阶方阵 A 是镜面反射矩阵, 则1必是 A 的_____重特征值. 9

4. 设 A 是 n 阶实对称矩阵且可逆, 则 A 和它的伴随矩阵 A^* 在复数域上_____合同, 在实数域上_____合同. (选填“必定”或“未必”) 必; 未必

5. 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2 - (x_3 - x_1)^2$ 的正惯性指数 $p =$ _____, 负惯性指数 $q =$ _____. 1; 1

6. 设 n 阶实对称矩阵 A 满足 $a_{11}a_{nn} < 0$, 则_____ (选填“必”或“未必”) 存在非零列向量 X , 使得 $X^T A X = 0$. 必

二、单选题 (18分. 每题3分, 共6题)

1. 设 V 是 n 维欧氏空间, $\alpha, \beta \in V$, 则以下关于内积的说法中, _____是错误的. B

(A) 若 $(\alpha, \alpha) = 0$, 则 $\alpha = 0$

(B) 若 $(\alpha, \beta) = 0$, 则 $\alpha = 0$ 或 $\beta = 0$

(C) 若 $(\alpha, \beta) = |\alpha||\beta|$, 则 α, β 线性相关

(D) 若 $0 < (\alpha, \beta) < |\alpha||\beta|$, 则 α, β 线性无关

2. 设 $\alpha_1 = (1, 0, 1)^T$, $\alpha_2 = (1, 2, 1)^T$, $\alpha_3 = (3, 1, 2)^T$, 记 $\beta_1 = \alpha_1$, $\beta_2 = \alpha_2 - k\beta_1$, $\beta_3 = \alpha_3 - l_1\beta_1 - l_2\beta_2$. 若 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 两两正交, 则 l_1, l_2 依次为_____. **A**

- (A) $(\frac{5}{2}, \frac{1}{2})$ (B) $(-\frac{5}{2}, \frac{1}{2})$ (C) $(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2})$ (D) $(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2})$

3. 设 S 和 T 是欧氏空间 V 的真子空间, 以下命题**错误**的是_____. **D**

- (A) $S \perp S^\perp$ (B) $S \cap S^\perp = 0$
(C) 若 $S \perp T$ 且 $V = S + T$, 则 $T = S^\perp$ (D) 若 $V = S + T$ 且 $S \cap T = 0$, 则 $T = S^\perp$

4. 设 A 是 n 阶正交矩阵, 若 $A = A^{-1}$, 且 $A \neq \pm E$, 则下列说法正确的有_____个. **D**

- a. A 是实对称矩阵 b. A 的特征值全为实数
c. A 的所有可能的特征值是 ± 1 d. A 的特征子空间 $V_1 = V_{-1}^\perp$
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

5. 设 A 是 3 阶实对称矩阵, E 是 3 阶单位矩阵. 若 $A^2 + A = 2E$, 且 $\det A = 4$, 则二次型 $X^T A X$ 的规范形是_____. **C**

- A. $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$ B. $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$ C. $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$ D. $-y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$

6. 设 A 是半正定矩阵, B 是正定矩阵, 以下说法**错误**的是_____. **C**

- A. A 的特征值 ≥ 0 B. $A + B$ 的主子式 > 0
C. AB 是半正定矩阵 D. B 的最大元在对角线上

三、(14分) 已知二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3, \quad g(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2.$$

(1) 求可逆线性替换 $X = CY$, 将 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化成 $g(y_1, y_2, y_3)$;

(2) 是否存在正交线性替换 $X = CY$, 将 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化成 $g(y_1, y_2, y_3)$? 请简述理由.

解 (1) (法一) 令 $f(x_1, x_2, x_3) = X^T A X$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

则由

$$\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ & 1 & -1 \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

令 $X = CY$, 其中 $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ & 1 & -1 \\ & & 1 \end{pmatrix}$, 则 $f(x_1, x_2, x_3) = y_1^2 + y_2^2 = g(y_1, y_2, y_3)$.

(法二) 有 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 = (x_1 + x_2 - x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2$.

再令: $\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - x_3 \\ y_2 = x_2 + x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$, 则 $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ & 1 & -1 \\ & & 1 \end{pmatrix}$.

(法三) 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 对应的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

所以

$$f_A(x) = |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 1 \\ -1 & \lambda - 2 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 2)(\lambda - 3).$$

因此 A 的特征值为 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$.

当 $\lambda = 0$ 时, 由 $AX = 0$ 解得 $X_1 = (2, -1, 1)^T$, 再将其单位化 $Q_1 = (\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})^T$; 同理可得, 当 $\lambda = 2$ 时, $Q_2 = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$; 当 $\lambda = 3$ 时, $Q_3 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$. 由此令

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \quad Q^T A Q = \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 2 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

则令 $C = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$, 可使 $f(x_1, x_2, x_3) = y_1^2 + y_2^2$.

(2) 不存在.

因为正交线性替换保持变换前后的二次型矩阵的特征值相同, 或迹相同. 已知条件的 f 和 g 的矩阵的特征值及迹不相同, 故不存在正交线性替换 $X = CY$, 将 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化成 $g(y_1, y_2, y_3)$.

常见错误1 多为计算错误, 第1小问第三种方法 Q 缺少单位化, 或者 C 计算错误.

常见错误2 第二小问得将方法三的 C 视为正交矩阵从而得出存在得结论.

四、(12分) 若 A 是正定矩阵, 证明:

(1) $\det A \leq a_{nn} \det A_{n-1}$, 其中 $\det A_{n-1}$ 是 A 的第 $n-1$ 个顺序主子式;

(2) $\det A \leq a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$.

证明 (1) (法一) 记 $A = \begin{pmatrix} A_{n-1} & \alpha \\ \alpha^T & a_{nn} \end{pmatrix}$. 因 A 正定, A 的所有顺序主子式大于零, 则 A_{n-1} 实对称, 顺序主子式全大于零, 因此 A_{n-1} 正定, 故 A_{n-1}^{-1} 正定, $\alpha^T A_{n-1}^{-1} \alpha \geq 0$, 则 $a_{nn} - \alpha^T A_{n-1}^{-1} \alpha \leq a_{nn}$.

又

$$\begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ -\alpha^T A_{n-1}^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{n-1} & \alpha \\ \alpha^T & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{n-1} & \alpha \\ 0 & a_{nn} - \alpha^T A_{n-1}^{-1} \alpha \end{pmatrix}.$$

因此

$$\det A = \det A_{n-1} (a_{nn} - \alpha^T A_{n-1}^{-1} \alpha) \leq a_{nn} \det A_{n-1}.$$

(法二) 记 $A = \begin{pmatrix} A_{n-1} & \alpha \\ \alpha^T & a_{nn} \end{pmatrix}$. 同法一知 A_{n-1} 正定, 因此 A_{n-1} 可逆, 且

$$\begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ -\alpha^T A_{n-1}^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{n-1} & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{n-1} & \alpha \\ 0 & -\alpha^T A_{n-1}^{-1} \alpha \end{pmatrix},$$

则 $-\alpha^T A_{n-1}^{-1} \alpha \leq 0$, 因此

$$\det A = \begin{vmatrix} A_{n-1} & 0 \\ \alpha^T & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{n-1} & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{vmatrix} \leq \begin{vmatrix} A_{n-1} & 0 \\ \alpha^T & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{nn} \det A_{n-1}.$$

(2) 对矩阵阶数 n 用归纳法. 当 $n = 1$ 时, $A = a_{11}$, 命题成立. 归纳假设结论对 $n-1$ 阶矩阵成立. 当矩阵阶数为 n 时, 由 (1), $\det A \leq a_{nn} \det A_{n-1}$. 由归纳假设 $\det A_{n-1} \leq a_{11}a_{22} \cdots a_{n-1,n-1}$, 所以 $\det A \leq a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$.

常见错误1 未证明 A_{n-1} 正定或没有证明为什么 $\alpha^T A_{n-1}^{-1} \alpha \geq 0$.

常见错误2 认为 $\alpha^T A_{n-1}^{-1} \alpha > 0$. 因 α 可能为 0, 所以只能断言 $\alpha^T A_{n-1}^{-1} \alpha \geq 0$.

五、(10分) 设 A, B 都是 n 阶半正定矩阵. 求证: 存在可逆矩阵 C , 使得

$$C^T A C = \text{diag}(1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots, 0), C^T B C = \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n).$$

证明 (法一) (李靖) 首先, 因为 A, B 半正定, 所以存在可逆矩阵 P , 使得

$$P^T A P = \begin{pmatrix} E_r & \\ & O \end{pmatrix}, P^T B P = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

则 $P^T B P$ 和 B_{22} 仍是半正定矩阵.

其次可以断言 $r(B_{21}, B_{22}) = r(B_{22})$. 事实上, 因 B_{22} 半正定, 所以存在可逆矩阵 S , 使得 $S^T B_{22} S = \text{diag}(E_s, O)$, 那么

$$\begin{pmatrix} E & \\ & S \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & \\ & S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & B_1 & B_2 \\ B_1^T & E_s & O \\ B_2^T & O & O \end{pmatrix} \doteq B' = (b_{ij})_{n \times n}.$$

注意到 B' 半正定, 其任意2阶顺序主子式 $\begin{vmatrix} b_{ii} & b_{ij} \\ b_{ij} & b_{jj} \end{vmatrix} \geq 0$, 所以若 B' 的第 (i, i) 元为0, 则 B' 的第 i 行和第 i 列元全为0, 故 $B_2 = O$. 从而

$$r(B_{21}, B_{22}) = r(S^T (B_{21}, B_{22}) \text{diag}(E, S)) = r \begin{pmatrix} B_1^T & E_s & O \\ O & O & O \end{pmatrix} = s = r(B_{22}).$$

上式说明 B_{21} 的列向量可由 B_{22} 列向量线性表出, 即存在矩阵 T , 使得 $B_{21} = B_{22} T$. 令 $Q = \begin{pmatrix} E_r & \\ -T & E_{n-r} \end{pmatrix}$, 则

$$Q^T \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} E_r & -T^T \\ & E_{n-r} \end{pmatrix}, Q^T \begin{pmatrix} E_r & \\ & O \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} E_r & \\ & O \end{pmatrix}.$$

因为 $B_{11} - T^T B_{22} T, B_{22}$ 半正定, 故存在正交矩阵 Q_1 和 Q_2 , 使得 $Q_1^T (B_{11} - T^T B_{22} T) Q_1 = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_r)$, $Q_2^T B_{22} Q_2 = \text{diag}(\mu_{r+1}, \dots, \mu_n)$. 令 $C = P \begin{pmatrix} E_r & \\ -T & E_{n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 & \\ & Q_2 \end{pmatrix}$, 则 C 可逆, 且

$$C^T A C = \text{diag}(1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots, 0), C^T B C = \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n).$$

(法二) 因为 A, B 半正定, 所以存在可逆矩阵 P , 使得

$$P^T A P = \begin{pmatrix} E_r & \\ & O \end{pmatrix}, P^T B P = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

则 $P^T B P$ 是半正定矩阵.

当 $n > r$ 时, 将 $P^T B P$ 分块为 $\begin{pmatrix} B_{n-1} & \alpha \\ \alpha^T & \mu_n \end{pmatrix}$.

若 $\mu_n \neq 0$, 令 $T_n = \begin{pmatrix} E_{n-1} & \\ -\frac{\alpha^T}{\mu_n} & 1 \end{pmatrix}$. 若 $\mu_n = 0$, 由半正定矩阵 $P^T B P$ 的任意2阶顺序主子式均大于等于零, 得 $\alpha = 0$. 令 $T_n = E_n$. 因此无论 μ_n 是否为0, 总有

$$T_n^T \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} T_n = \begin{pmatrix} B_{n-1} & \\ & \mu_n \end{pmatrix}, \quad T_n^T \begin{pmatrix} E_r & \\ & O \end{pmatrix} T_n = \begin{pmatrix} E_r & \\ & O \end{pmatrix}.$$

则 B_{n-1} 是半正定矩阵.

若 $n-1 > r$, 设 $n-1$ 阶半正定矩阵 B_{n-1} 最后一个对角元为 μ_{n-1} , 同理可得存在可逆 T_{n-1} , 使得

$$T_{n-1}^T B_{n-1} T_{n-1} = \begin{pmatrix} B_{n-2} & \\ & \mu_{n-1} \end{pmatrix}.$$

从而

$$\begin{pmatrix} T_{n-1}^T & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{n-1} & \\ & \mu_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{n-1} & \\ & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{n-2} & \\ & \mu_{n-1} \\ & & \mu_n \end{pmatrix}$$

且

$$\begin{pmatrix} T_{n-1}^T & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_r & \\ & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{n-1} & \\ & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r & \\ & O \end{pmatrix}.$$

不断做下去, 得到可逆矩阵 $T_n, T_{n-1}, \dots, T_{r+1}$, 令 $T = T_{n-1} \begin{pmatrix} T_{n-1}^T & \\ & 1 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} T_{r+1}^T & \\ & E_{n-r-1} \end{pmatrix}$, 则 T 可逆,

$$T^T \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} B_r & & \\ & \mu_{r+1} & \\ & & \ddots \\ & & & \mu_n \end{pmatrix}, \quad T^T \begin{pmatrix} E_r & \\ & O \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} E_r & \\ & O \end{pmatrix}.$$

因为 B_r 半正定, 故存在正交矩阵 Q , 使得 $Q^T B_r Q = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_r)$, 令 $C = P T \begin{pmatrix} Q & \\ & E_{n-r} \end{pmatrix}$, 则 C 可逆, 且

$$C^T A C = \text{diag}(1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots, 0), \quad C^T B C = \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n).$$

常见错误 因为 A 半正定, 所以存在可逆矩阵 P , 使得 $P^TAP = \text{diag}(E_r, O)$. 因为 B 半正定, 所以 $P^TB P$ 半正定, 存在正交矩阵 Q , 使得 $Q^TP^TB PQ = \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$. 且 $Q^TP^TAPQ = \text{diag}(E_r, O)$. 将 Q 分成 2×2 分块矩阵, 直接计算可知这样的 Q 不能保证 $Q^TP^TAPQ = \text{diag}(E_r, O)$.

六、(12分) 设 M 为 n 阶实方阵, 若对任意非零实列向量 α , 总有 $\alpha^T M \alpha > 0$, 则称 M 为亚正定矩阵. 证明下列三个结论等价:

- (1) M 是亚正定矩阵;
- (2) $M + M^T$ 是正定矩阵;
- (3) $M = A + S$, 其中 A 是正定矩阵, S 是实反称矩阵.

证明 (法一) (1) \Rightarrow (2) 显然 $M + M^T$ 是实对称矩阵, 且因 M 是亚正定矩阵, 所以对任意实向量 $\alpha \neq 0$, 总有

$$\alpha^T (M + M^T) \alpha = \alpha^T M \alpha + \alpha^T M^T \alpha = 2\alpha^T M \alpha > 0,$$

所以 $M + M^T$ 是正定矩阵.

(2) \Rightarrow (3) 令 $A = \frac{1}{2}(M + M^T)$, $S = \frac{1}{2}(M - M^T)$, 则 A 实对称, S 实反称矩阵, $M = A + S$, 且由(2)知, A 正定.

(3) \Rightarrow (1) 对任意实向量 $\alpha \neq 0$, 因为 S 是反称矩阵, 所以 $\alpha^T S \alpha = -(S\alpha)^T \alpha = -\alpha^T (S\alpha) = -\alpha^T S \alpha$, 故 $\alpha^T S \alpha = 0$. 结合 A 正定, $\alpha^T M \alpha = \alpha^T A \alpha + \alpha^T S \alpha = \alpha^T A \alpha > 0$, 因此 M 是亚正定矩阵.

(法二) (陈佳乐, 陈建南, 黄雪韩, 洪致远, 王江林, 汪愈颢, 徐祉朝, 尤宇烁, 余能斌, 解渝鲁 等)

(1) \Rightarrow (2) 同法一.

(2) \Rightarrow (1) 若 M 不是亚正定矩阵, 则存在非零实向量 α , 使得 $\alpha^T M \alpha \leq 0$. 故 $\alpha^T (M + M^T) \alpha = 2\alpha^T M \alpha \leq 0$, 矛盾.

(2) \Rightarrow (3) 同法一.

(3) \Rightarrow (2) 由已知得 $M + M^T = A + S + A^T + S^T = 2A$, 因为 A 正定, 所以 $M + M^T$ 正定.

(法三) (陈可欣, 付谦益, 卢俊飞, 尼可, 单夕航, 沈妍涵, 尚植淇, 宋元浩, 辛宇泽, 詹筱辰 等) (1) \Leftrightarrow (2) 同法二.

(1) \Rightarrow (3) 令 $A = \frac{1}{2}(M + M^T)$, $S = \frac{1}{2}(M - M^T)$, 则 $M = A + S$, 由(1) \Rightarrow (2)得 A 正定. 直接计算得 $S^T = \frac{1}{2}(M^T - M) = -S$, 所以 S 是反称矩阵.

(3) \Rightarrow (1) 因 A 正定, 所以对任意非零实向量 α , $\alpha^T A \alpha > 0$. 因 S 反称, 所以 $\alpha^T S \alpha = -\alpha^T S^T \alpha = -\alpha^T (S\alpha)$, 因此 $\alpha^T S \alpha = 0$. 进而 $\alpha^T M \alpha = \alpha^T A \alpha + \alpha^T S \alpha = \alpha^T A \alpha > 0$, 这就证明了 M 是亚正定矩阵.

常见错误1 证明(2)成立时, 未指出 $M + M^T$ 是对称矩阵.

常见错误2 (3)证明中没有构造 A 和 S .

常见错误3 证明不完整, 如只证明 $(1) \Rightarrow (2), (3) \Rightarrow (2), (3) \Rightarrow (1)$.

七、(10分) 设 φ 是 n 维欧氏空间 V 的正交变换. 证明 $\text{Im}(\varphi - \text{id}_V) = \text{Im}(\varphi - \text{id}_V)^2$.

证明 (法一) (蔡文傑, 车禹赫, 陈可伊, 陈少极, 邸制宜, 胡博钦, 黄慈嫻, 黄尉宸, 柯鸿霖, 汤圣龙, 陶慧敏, 王莲浪, 王志伟, 杨沛轩, 杨浩, 杨力畅, 赵志炫, 郑宇君, 詹浩 等) 因为 φ 是 n 维欧氏空间 V 的正交变换, 所以存在 V 的标准正交基 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, 使得 φ 在该基下的矩阵为 Q , 即

$$\varphi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)Q,$$

其中

$$Q = \text{diag}\{1, \dots, 1, -1, \dots, -1, S_1, \dots, S_t\},$$

1有 p 个, -1 有 q 个, $p+q+2t=n$ 且 $S_i = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \end{pmatrix}$, $\theta_i \in (0, \pi)$ ($i=1, 2, \dots, t$).

此时, $\varphi - \text{id}_V$ 和 $(\varphi - \text{id}_V)^2$ 在该基下的矩阵分别为

$$Q - E = \text{diag}\{0, \dots, 0, -2, \dots, -2, S_1 - E_2, \dots, S_t - E_2\}$$

和

$$(Q - E)^2 = \text{diag}\{0, \dots, 0, 4, \dots, 4, (S_1 - E_2)^2, \dots, (S_t - E_2)^2\}.$$

注意到 $S_i - E_2$ ($i=1, \dots, t$)可逆. 故而 $(S_i - E_2)^2$ ($i=1, \dots, t$)也可逆. 因此

$$\text{Im}(\varphi - \text{id}_V) = \langle \xi_{p+1}, \xi_{p+2}, \dots, \xi_n \rangle = \text{Im}(\varphi - \text{id}_V)^2.$$

(法二) (戴炜杰) 对任意 $\beta \in \text{Im}(\varphi - \text{id}_V)^2$, 存在 $\alpha \in V$ 使得

$$\beta = (\varphi - \text{id}_V)^2(\alpha) = (\varphi - \text{id}_V)((\varphi - \text{id}_V)(\alpha)).$$

所以 $\beta \in \text{Im}(\varphi - \text{id}_V)$. 故而 $\text{Im}(\varphi - \text{id}_V)^2 \subseteq \text{Im}(\varphi - \text{id}_V)$.

因此, 要证 $\text{Im}(\varphi - \text{id}_V) = \text{Im}(\varphi - \text{id}_V)^2$, 只需证明

$$\dim \text{Im}(\varphi - \text{id}_V) = \dim \text{Im}(\varphi - \text{id}_V)^2.$$

取定 V 的一个标准正交基, 设 φ 在该基下的矩阵为 Q . 因为 φ 是 n 维欧氏空间 V 上的正交变换, 所以 Q 为正交矩阵. 此时, id_V 在该基下的矩阵为单位矩阵 E . 故而, $\varphi - \text{id}_V$ 和 $(\varphi - \text{id}_V)^2$ 在该基下的矩阵分别为 $Q - E$ 和 $(Q - E)^2$ 且

$$\dim \text{Im}(\varphi - \text{id}_V) = r(Q - E), \quad \dim \text{Im}(\varphi - \text{id}_V)^2 = r((Q - E)^2).$$

在复数域 \mathbb{C} 上, 存在酉矩阵 U 使得

$$\bar{U}^T Q U = \text{diag}\{1, \dots, 1, -1, \dots, -1, \lambda_1, \bar{\lambda}_1, \dots, \lambda_t, \bar{\lambda}_t\}$$

其中1有 p 个, -1 有 q 个, $p+q+2t=n$ 且 $\lambda_i \neq \pm 1$. 进而,

$$\bar{U}^T (Q - E) U = \text{diag}\{0, \dots, 0, -2, \dots, -2, \lambda_1 - 1, \bar{\lambda}_1 - 1, \dots, \lambda_t - 1, \bar{\lambda}_t - 1\},$$

$$\bar{U}^T (Q - E)^2 U = \text{diag}\{0, \dots, 0, 4, \dots, 4, (\lambda_1 - 1)^2, (\bar{\lambda}_1 - 1)^2, \dots, (\lambda_t - 1)^2, (\bar{\lambda}_t - 1)^2\}.$$

所以,

$$r(Q - E) = r(\bar{U}^T (Q - E) U) = r(\bar{U}^T (Q - E)^2 U) = r((Q - E)^2).$$

綜上有 $\text{Im}(\varphi - \text{id}_V) = \text{Im}(\varphi - \text{id}_V)^2$.

(法三) (高御骁) 首先, 对任意 $\beta \in \text{Im}(\varphi - \text{id}_V)^2$, 存在 $\alpha \in V$, 使得

$$\beta = (\varphi - \text{id}_V)^2(\alpha) = (\varphi - \text{id}_V)((\varphi - \text{id}_V)(\alpha)).$$

所以 $\beta \in \text{Im}(\varphi - \text{id}_V)$. 故而

$$\text{Im}(\varphi - \text{id}_V)^2 \subseteq \text{Im}(\varphi - \text{id}_V).$$

其次, 对任意 $\beta \in \text{Im}(\varphi - \text{id}_V)$, 存在 $\alpha \in V$, 使得

$$\beta = (\varphi - \text{id}_V)(\alpha) = \varphi(\alpha) - \alpha.$$

注意到 $V = \text{Im}(\varphi - \text{id}_V) \oplus (\text{Im}(\varphi - \text{id}_V))^\perp$. 故而, 存在 $\alpha_1 \in \text{Im}(\varphi - \text{id}_V)$ 和 $\alpha_2 \in (\text{Im}(\varphi - \text{id}_V))^\perp$, 使得 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$. 此时,

$$\varphi(\alpha_2) = \alpha_2 + \alpha_1 - \varphi(\alpha_1) + \beta = \alpha_2 + \tilde{\beta}$$

其中 $\tilde{\beta} = \alpha_1 - \varphi(\alpha_1) + \beta$ 且 $\tilde{\beta} \in \text{Im}(\varphi - \text{id}_V)$. 所以 $(\alpha_2, \tilde{\beta}) = 0$, 即 $(\alpha_2, \varphi(\alpha_2) - \alpha_2) = 0$. 进而有

$$(\alpha_2, \alpha_2) = (\varphi(\alpha_2), \alpha_2).$$

又因为 φ 是 n 维欧氏空间 V 的正交变换, 所以

$$\begin{aligned} (\tilde{\beta}, \tilde{\beta}) &= (\varphi(\alpha_2) - \alpha_2, \varphi(\alpha_2) - \alpha_2) \\ &= (\varphi(\alpha_2), \varphi(\alpha_2)) + (\alpha_2, \alpha_2) - 2(\varphi(\alpha_2), \alpha_2) \\ &= (\alpha_2, \alpha_2) + (\alpha_2, \alpha_2) - 2(\alpha_2, \alpha_2) = 0. \end{aligned}$$

故而 $\tilde{\beta} = 0$, 即 $\alpha_1 - \varphi(\alpha_1) + \beta = 0$. 所以 $\beta = (\varphi - \text{id}_V)(\alpha_1) \in \text{Im}(\varphi - \text{id}_V)^2$. 因此

$$\text{Im}(\varphi - \text{id}_V) \subseteq \text{Im}(\varphi - \text{id}_V)^2.$$

综上即得 $\text{Im}(\varphi - \text{id}_V) = \text{Im}(\varphi - \text{id}_V)^2$.

(法四) (郑雨晨) 要证 $\text{Im}(\varphi - \text{id}_V) = \text{Im}(\varphi - \text{id}_V)^2$, 只需证

$$\text{Im}(\varphi - \text{id}_V) \cap \text{Ker}(\varphi - \text{id}_V) = \{0\}.$$

对任意 $\beta \in \text{Im}(\varphi - \text{id}_V) \cap \text{Ker}(\varphi - \text{id}_V)$, 存在 $\alpha \in V$ 使得

$$\beta = \varphi(\alpha) - \alpha \quad \text{且} \quad \varphi(\beta) - \beta = 0.$$

因为 φ 是 n 维欧氏空间 V 上的正交变换, 所以

$$(\alpha, \beta) = (\varphi(\alpha), \varphi(\beta)) = ((\varphi - \text{id}_V)(\alpha) + \alpha, \beta) = (\alpha + \beta, \beta) = (\alpha, \beta) + (\beta, \beta).$$

故而 $(\beta, \beta) = 0$, 即 $\beta = 0$. 因此,

$$\text{Im}(\varphi - \text{id}_V) \cap \text{Ker}(\varphi - \text{id}_V) = \{0\}.$$

(法五) (郭思彤) 要证 $\text{Im}(\varphi - \text{id}_V) = \text{Im}(\varphi - \text{id}_V)^2$, 只需证

$$\text{Im}(\varphi - \text{id}_V) \cap \text{Ker}(\varphi - \text{id}_V) = \{0\}.$$

对任意 $\beta \in \text{Im}(\varphi - \text{id}_V) \cap \text{Ker}(\varphi - \text{id}_V)$, 存在 $\alpha \in V$ 使得

$$\beta = \varphi(\alpha) - \alpha \quad \text{且} \quad \varphi(\beta) - \beta = 0.$$

因为 $V = \langle \beta \rangle \oplus \langle \beta \rangle^\perp$, 存在 $\alpha_1 \in \langle \beta \rangle$ 和 $\alpha_2 \in \langle \beta \rangle^\perp$ 使得

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \quad \varphi(\alpha_1) - \alpha_1 = 0 \quad \text{且} \quad (\alpha_2, \beta) = 0.$$

又因为 φ 是 n 维欧氏空间 V 上的正交变换, 所以

$$(\varphi(\alpha_2), \beta) = (\varphi(\alpha_2), \varphi(\beta)) = (\alpha_2, \beta) = 0.$$

故而 $\varphi(\alpha_2) \in \langle \beta \rangle^\perp$ 且

$$\beta = \varphi(\alpha) - \alpha = \varphi(\alpha_1) + \varphi(\alpha_2) - \alpha_1 - \alpha_2 = \varphi(\alpha_2) - \alpha_2 \in \langle \beta \rangle^\perp.$$

所以 $\beta = 0$. 进而

$$\text{Im}(\varphi - \text{id}_V) \cap \text{Ker}(\varphi - \text{id}_V) = \{0\}.$$

(法六) (黎隽宇, 王昱祺) 取定 V 的一个标准正交基, 设 φ 在该基下的矩阵为 Q . 因为 φ 是 n 维欧氏空间 V 的正交变换, 所以 Q 为正交矩阵. 此时, id_V 在该基下的矩阵为单位矩阵 E . 证明 $\text{Im}(\varphi - \text{id}_V) = \text{Im}(\varphi - \text{id}_V)^2$ 等价于证明 $\text{Im}(Q - E) = \text{Im}(Q - E)^2$.

对于任意矩阵 $A \in F^{n \times n}$, 因为

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^T y \rangle \quad \forall x, y \in F^n,$$

所以

$$(\text{Im}(A))^\perp = \text{Ker}(A^T).$$

故而, 要证明 $\text{Im}(Q - E) = \text{Im}(Q - E)^2$ 只需证明

$$\text{Ker}(Q^T - E) = \text{Ker}(Q^T - E)^2.$$

对任意 $x \in \text{Ker}(Q^T - E)$, 有 $(Q^T - E)x = 0$. 故而 $(Q^T - E)^2 x = 0$, 即 $x \in \text{Ker}(Q^T - E)^2$. 所以

$$\text{Ker}(Q^T - E) \subseteq \text{Ker}(Q^T - E)^2.$$

对任意 $x \in \text{Ker}(Q^T - E)^2$, 有 $(Q^T - E)^2 x = 0$, 即 $((Q^T)^2 - 2Q^T + E)x = 0$. 又因为

$$Q((Q^T)^2 - 2Q^T + E) = Q^T - 2E + Q,$$

所以

$$-(Q^T - E)(Q - E)x = (Q^T - 2E + Q)x = Q((Q^T)^2 - 2Q^T + E)x = 0.$$

进而,

$$((Q - E)x, (Q - E)x) = x^T(Q^T - E)(Q - E)x = 0.$$

所以 $(Q - E)x = 0$. 因此, $\text{Ker}(Q^T - E)^2 \subseteq \text{Ker}(Q^T - E)$.

综上有

$$\text{Ker}(Q^T - E) = \text{Ker}(Q^T - E)^2.$$

常见错误1 正交变换性质使用错误; 线性变换语言和矩阵语言使用混乱; 转换为矩阵形式时未指明标准正交基; 正交矩阵的标准型使用错误.

八、(6分) 设 A 为 n 阶半正定矩阵, B 为 n 实方阵. 证明: 若有自然数 r , 使得 $A^r B = BA^r$, 则必有 $AB = BA$.

证明 (法一) (代靖涵, 柯智元, 李林泽, 王良涛, 吴方予, 许弈烺, 杨宪邦 等) 对半正定矩阵 A , 存在正交矩阵 Q , 使得 $Q^T A Q = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, 其中 $\lambda_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$.

由 $A^r B = BA^r$, 得 $(Q^T A Q)^r (Q^T B Q) = (Q^T B Q)(Q^T A Q)^r$. 记 $Q^T B Q = (b_{ij})_{n \times n}$, 则 $\text{diag}(\lambda_1^r, \lambda_2^r, \dots, \lambda_n^r) D = D \text{diag}(\lambda_1^r, \lambda_2^r, \dots, \lambda_n^r)$.

比较等式两边矩阵的 (i, j) 元知, $\lambda_i^r b_{ij} = \lambda_j^r b_{ij}$. 故只要 $\lambda_i^r \neq \lambda_j^r$, 就有 $b_{ij} = 0$. 而 $\lambda_i \geq 0$, 因此 $\lambda_i^r = \lambda_j^r$ 充要条件是 $\lambda_i = \lambda_j$. 故只要 $\lambda_i \neq \lambda_j$, 就有 $b_{ij} = 0$.

这反过来又说明 $\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)D = D\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. 即 $Q^T A Q Q^T B Q = Q^T B Q Q^T A Q$, 故 $AB = BA$.

(法二) (汪泽锋) 首先证明, 对正定矩阵 A , 存在多项式 $f(x)$, 使得 $A = f(A')$.

事实上, 对 A , 存在正交矩阵 Q , 使得 $Q^T A Q = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ (1 分)

由Lagrange插值公式, 令 $f(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \prod_{j \neq i} \frac{x - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j}$, 则 $f(\lambda_i) = \lambda_i$, 从而 $f(Q^T A' Q) = Q^T A Q$, 故 $A = f(A')$.

因此, 若 $A^r B = B A^r$, 则 $AB = BA$ 的充要条件是 $f(A')B = B f(A')$.

其次证明若 A 半正定, 命题成立. 因为若 A 半正定, 则对任意 $t > 0$, $A + tE$ 正定. 由上面证明有 $(A + tE)^r B = B(A + tE)^r$ 充要条件是 $(A + tE)B = B(A + tE)$, 充要条件是 $AB = BA$.

常见错误 未证明为什么由 $\lambda_i^r b_{ij} = \lambda_j^r b_{ij}$ 可得 $\lambda_i b_{ij} = \lambda_j b_{ij}$.

附加题 (10分) 设 A, B 均为2024阶正交矩阵, 齐次线性方程组 $AX = BX$ ($X \in \mathbb{R}^{2024}$) 的解空间维数为3. 问矩阵 A, B 是否可能相似? 证明你的结论.

证明 A, B 不相似.

(法一) (柯嘉惠) 令 $C = AB^{-1}$, 则由 A, B 是正交矩阵知 C 也是正交矩阵, 其特征值模长为1. 所以 C 正交相似于 $\text{diag}(E_p, -E_q, K_1, \dots, K_r)$, 其中 $K_i = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \end{pmatrix}$, $i = 1, 2, \dots, r$, $\det C = (-1)^q$.

因为 $AX = BX$ 与 $(E - C)X = 0$ 同解, 且解空间维数为3, 说明 C 有3重特征值1, 即 $q = 3$. 所以 $-1 = \det C = \det A \det B \neq 1$, 故 $\det A \neq \det B$, 从而 A, B 不相似.

(法二) (吴若冰) 令 $C = AB^{-1}$, 则由 A, B 是正交矩阵知 C 也是正交矩阵, 其特征值模长为1. 所以 C 复相似于对角矩阵

$$\text{diag}(E_p, -E_q, \cos \theta_1 + i \sin \theta_1, \cos \theta_1 - i \sin \theta_1, \dots, \cos \theta_r + i \sin \theta_r, \cos \theta_r - i \sin \theta_r),$$

其中 $0 < \theta_j < \pi$, $j = 1, 2, \dots, r$, $\det C = (-1)^q$.

因为 $AX = BX$ 与 $(E - C)X = 0$ 同解, 且解空间维数为3, 说明 C 有3重特征值1, 即 $q = 3$. 所以 $-1 = \det C = \det A \det B \neq 1$, 故 $\det A \neq \det B$, 从而 A, B 不相似.

常见错误1 直接由 $(E - C)X = 0$ 解空间维数为3, 推断 $E - C$ 的0特征值是3重的.

常见错误2 设 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, B 的特征值为 $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$, 则 C 的特征值为 $\lambda_1^{-1} \mu_1, \lambda_2^{-1} \mu_2, \dots, \lambda_n^{-1} \mu_n$.