



厦门大学《高等代数 (II)》课程试卷

数学,经济学院各,统计,邹院系 2023,2022 年级各 专业

主考教师: 杜妮,林鹭,阮诗隼,陈继勇 试卷类型: A 卷 考试日期:

2024.06.18

一、填空题 (18分. 每题3分, 共6题)

1. 设欧氏空间 \mathbb{R}^2 上的内积定义为 $(X, Y) = X^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} Y$, 则向量 $(1, 1)^T$ 的长度为_____.

2. 设实对称矩阵 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ 正交相似于 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$, 则 $a =$ _____, $\lambda_2 =$ _____,
 $\lambda_1 =$ _____.

3. 设10阶方阵 A 是镜面反射矩阵, 则1必是 A 的_____重特征值.

4. 设 A 是 n 阶实对称矩阵且可逆, 则 A 和它的伴随矩阵 A^* 在复数域上_____合同, 在实数域上_____合同. (选填“必定”或“未必”)

5. 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2 - (x_3 - x_1)^2$ 的正惯性指数 $p =$ _____, 负惯性指数 $q =$ _____.

6. 设 n 阶实对称矩阵 A 满足 $a_{11}a_{nn} < 0$, 则_____ (选填“必”或“未必”)存在非零列向量 X , 使得 $X^T A X = 0$.

二、单选题 (18分. 每题3分, 共6题)

1. 设 V 是 n 维欧氏空间, $\alpha, \beta \in V$, 则以下关于内积的说法中, _____是错误的.

(A) 若 $(\alpha, \alpha) = 0$, 则 $\alpha = 0$

(B) 若 $(\alpha, \beta) = 0$, 则 $\alpha = 0$ 或 $\beta = 0$

(C) 若 $(\alpha, \beta) = |\alpha||\beta|$, 则 α, β 线性相关

(D) 若 $0 < (\alpha, \beta) < |\alpha||\beta|$, 则 α, β 线性无关

2. 设 $\alpha_1 = (1, 0, 1)^T$, $\alpha_2 = (1, 2, 1)^T$, $\alpha_3 = (3, 1, 2)^T$, 记 $\beta_1 = \alpha_1$, $\beta_2 = \alpha_2 - k\beta_1$, $\beta_3 = \alpha_3 - l_1\beta_1 - l_2\beta_2$. 若 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 两两正交, 则 l_1, l_2 依次为_____.

- (A) $(\frac{5}{2}, \frac{1}{2})$ (B) $(-\frac{5}{2}, \frac{1}{2})$ (C) $(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2})$ (D) $(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2})$

3. 设 S 和 T 是欧氏空间 V 的真子空间, 以下命题**错误**的是_____.

- (A) $S \perp S^\perp$ (B) $S \cap S^\perp = 0$
(C) 若 $S \perp T$ 且 $V = S + T$, 则 $T = S^\perp$ (D) 若 $V = S + T$ 且 $S \cap T = 0$, 则 $T = S^\perp$

4. 设 A 是 n 阶正交矩阵, 若 $A = A^{-1}$, 且 $A \neq \pm E$, 则下列说法正确的有_____个.

- a. A 是实对称矩阵 b. A 的特征值全为实数
c. A 的所有可能的特征值是 ± 1 d. A 的特征子空间 $V_1 = V_{-1}^\perp$
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

5. 设 A 是 3 阶实对称矩阵, E 是 3 阶单位矩阵. 若 $A^2 + A = 2E$, 且 $\det A = 4$, 则二次型 $X^T A X$ 的规范形是_____.

- A. $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$ B. $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$ C. $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$ D. $-y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$

6. 设 A 是半正定矩阵, B 是正定矩阵, 以下说法**错误**的是_____.

- A. A 的特征值 ≥ 0 B. $A + B$ 的主子式 > 0
C. AB 是半正定矩阵 D. B 的最大元在对角线上

三、(14分) 已知二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3, \quad g(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2.$$

- (1) 求可逆线性替换 $X = CY$, 将 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化成 $g(y_1, y_2, y_3)$;
(2) 是否存在正交线性替换 $X = CY$, 将 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化成 $g(y_1, y_2, y_3)$? 请简述理由.

四、(12分) 若 A 是正定矩阵, 证明:

- (1) $\det A \leq a_{nn}A_{n-1}$, 其中 A_{n-1} 是 A 的第 $n-1$ 个顺序主子式;
(2) $\det A \leq a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$.

五、(10分) 设 A, B 都是 n 阶半正定矩阵. 求证: 存在可逆矩阵 C , 使得

$$C^T A C = \text{diag}(1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots, 0), C^T B C = \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n).$$

六、(12分) 设 M 为 n 阶实方阵, 若对任意非零实列向量 α , 总有 $\alpha^T M \alpha > 0$, 则称 M 为亚正定矩阵. 证明下列三个结论等价:

- (1) M 是亚正定矩阵;
- (2) $M + M^T$ 是正定矩阵;
- (3) $M = A + S$, 其中 A 是正定矩阵, S 是实反称矩阵.

七、(10分) 设 φ 是 n 维欧氏空间 V 的正交变换. 证明 $\text{Im}(\varphi - \text{id}_V) = \text{Im}(\varphi - \text{id}_V)^2$.

八、(6分) 设 A 为 n 阶半正定矩阵, B 为 n 实方阵. 证明: 若有自然数 r , 使得 $A^r B = B A^r$, 则必有 $AB = BA$.

附加题 (10分) 设 A, B 均为2024阶正交矩阵, 齐次线性方程组 $AX = BX$ ($X \in \mathbb{R}^{2024}$) 的解空间维数为3. 问矩阵 A, B 是否可能相似? 证明你的结论.