



厦门大学《高等代数 (I)》课程试卷

数学,经济学院各,统计,大数据系 2024 年级各 专业

主考教师: 杜妮,阮诗隼,易少云,林鹭 试卷类型: A 卷 考试日期:
24.11.13

一、填空题: (18分. 每题3分, 共6题)

1. 设3阶方阵 $A = (\alpha, \beta, \gamma)$, $B = (\alpha, \beta, \delta)$. 若 $\det A = a$, $\det B = b$, 则行列式 $\det(3A - B) =$ _____. $12a - 4b$

2. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$, 则与 A 乘积可交换的矩阵 B 形如 _____. $\text{diag}(a, b, c)$, $a, b, c \in F$

3. 设 $A = (a_{ij})$ 为3阶方阵, A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式, 若 A 的每行元素之和为2, 且 A 的行列式为3, 则 $A_{11} + A_{21} + A_{31} =$ _____. $\frac{3}{2}$.

4. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 并且可由向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表出. 则 _____ (选填“必”“未必”) 存在某个向量 β_j ($j = 1, 2, \dots, t$) 使得向量组 $\beta_j, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关. 必

5. 设 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$ 经行初等变换化为 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 _____ 是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 的

极大线性无关组, 其余向量可用该极大线性无关组表示为 _____. $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4; \alpha_2 = 2\alpha_1, \alpha_5 = 3\alpha_1 + 4\alpha_3$

6. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & x & -1 \\ -1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$, 若存在非零矩阵 B 使得 $AB = O$, 则 $x =$ _____. -5

二、单选题: (18分, 每题3分, 共6题)

1. 设 A, B, C 均为 n 阶方阵, 以下说法正确的是_____ . **A**

(A) $A^2 - E = (A + E)(A - E)$

(B) $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$

(C) 若 $AB = AC$, 则 $B = C$

(D) 若 $AB = O$, 则 $A = O$ 或 $B = O$

2. 设 $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $PAQ =$ _____ . **C**

(A) $\begin{pmatrix} a_1 & 2a_2 + 3a_3 & a_3 \\ b_1 & 2b_2 + 3b_3 & 2b_3 \\ c_1 & 2c_2 + 3b_2 & c_3 \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} a_1 & 2a_2 & a_3 \\ b_1 & 2b_2 & b_3 \\ c_1 + 3b_1 & c_2 + 6b_2 & c_3 + 3b_3 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 + 3a_3 & a_3 \\ 2b_1 & 2b_2 + 6b_3 & 2b_3 \\ c_1 & c_2 + 3c_3 & c_3 \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 2b_1 & 2b_2 & 2b_3 \\ c_1 + 6b_1 & c_2 + 6b_2 & c_3 + 6b_3 \end{pmatrix}$

3. 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times m$ 矩阵, 则_____ . **C**

(A) $AB = BA$

(B) $r(AB) = r(BA)$

(C) $(AB)^T = B^T A^T$

(D) $\det(AB) = \det(BA)$

4. 已知 n 阶方阵 A, B, C 满足 $ABC = O$, E 是 n 阶单位矩阵, 若

$$r \begin{pmatrix} O & A \\ BC & E \end{pmatrix} = r_1, \quad r \begin{pmatrix} AB & C \\ O & E \end{pmatrix} = r_2, \quad r \begin{pmatrix} E & AB \\ AB & O \end{pmatrix} = r_3,$$

则_____ . **B**

(A) $r_1 \leq r_2 \leq r_3$

(B) $r_1 \leq r_3 \leq r_2$

(C) $r_3 \leq r_1 \leq r_2$

(D) $r_2 \leq r_1 \leq r_3$

5. 设向量 $\alpha_1 = (a, 1, -1, 1)^T$, $\alpha_2 = (1, 1, b, a)^T$, $\alpha_3 = (1, a, -1, 1)^T$. 若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 且其中任意两个向量均线性无关, 则_____ . **A**

(A) $a = -2, b = 2$

(B) $a \neq -2, b = 2$

(C) $a = 1, b = -1$

(D) $a = 1, b \neq -1$

6. 设3阶方阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$. 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 可以由向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表出, 则_____ . **D**

(A) $AX = 0$ 的解均为 $BX = 0$ 的解

(B) $A^T X = 0$ 的解均为 $B^T X = 0$ 的解

(C) $BX = 0$ 的解均为 $AX = 0$ 的解

(D) $B^T X = 0$ 的解均为 $A^T X = 0$ 的解

三、(10分) 计算行列式

$$\begin{vmatrix} a+m & b & c & d \\ a & b+m & c & d \\ a & b & c+m & d \\ a & b & c & d+m \end{vmatrix}.$$

解 (法一) 拆分法

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & b+m & c & d \\ a & b & c+m & d \\ a & b & c & d+m \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m & b & c & d \\ 0 & b+m & c & d \\ 0 & b & c+m & d \\ 0 & b & c & d+m \end{vmatrix} \\ &= a \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m & b & c & d \\ 0 & b & c & d \\ 0 & b & c+m & d \\ 0 & b & c & d+m \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m & 0 & c & d \\ 0 & m & c & d \\ 0 & 0 & c+m & d \\ 0 & 0 & c & d+m \end{vmatrix} \\ &= m^3 a + b \begin{vmatrix} m & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & m & 0 \\ 0 & 1 & 0 & m \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m & 0 & c & d \\ 0 & m & c & d \\ 0 & 0 & c & d \\ 0 & 0 & c & d+m \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m & 0 & 0 & d \\ 0 & m & 0 & d \\ 0 & 0 & m & d \\ 0 & 0 & 0 & d+m \end{vmatrix} \\ &= m^3 a + m^3 b + c \begin{vmatrix} m & 0 & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & m \end{vmatrix} + m^3(d+m) \\ &= m^3(a+b+c+d+m). \end{aligned}$$

(法二) 加边法

$$\text{原式} = \begin{vmatrix} 1 & -a & -b & -c & -d \\ 0 & a+m & b & c & d \\ 0 & a & b+m & c & d \\ 0 & a & b & c+m & d \\ 0 & a & b & c & d+m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -a & -b & -c & -d \\ 1 & m & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & m & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & m & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & m \end{vmatrix}.$$

若 $m = 0$, 行列式为0. 若 $m \neq 0$, 则

$$\text{原式} = \begin{vmatrix} 1 + \frac{a+b+c+d}{m} & -a & -b & -c & -d \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m \end{vmatrix} = m^3(m+a+b+c+d).$$

综上, 原式 $= m^3(m+a+b+c+d)$.

(法三) 降阶公式 由降阶公式 $\det(\lambda E_s - AB) = \lambda^{s-t} \det(\lambda E_t - BA)$, 得

$$\text{原式} = \left| mE_4 - \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} (a, b, c, d) \right| = m^3 \det(mE_1 - (a, b, c, d) \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}) = m^3(1+a+b+c+d).$$

四、(12分) 设 $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ 且 $ABA^{-1} = BA^{-1} + 3E$, 求 B .

解 由于 $\det A^* = 8$ 和 $AA^* = \det A E_4$, 可知 $\det A = 2$.

将 $ABA^{-1} = BA^{-1} + 3E$ 两边同时右乘 A , 左乘 A^* 得

$$A^*AB = A^*B + 3A^*A,$$

所以 $(\det A)B = A^*B + 3(\det A)E$, 即 $2B = A^*B + 6E$. 由此 $(2E - A^*)B = 6E$, 故 $B = 6(2E - A^*)^{-1}$. 直接计算得

$$2E - A^* = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ -1 & 0 & 1 & \\ 0 & 3 & 0 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow (2E - A^*)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & 1 & \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$\text{所以 } B = \begin{pmatrix} 6 & & & \\ 0 & 6 & & \\ 6 & 0 & 6 & \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

五、(12分) 设 $kl \neq 1$, 矩阵 A, B 满足 $AB + kA + lB + E = O$.

(1) 证明: $A + lE$ 可逆并求其逆;

(2) $AB = BA$ 吗? 若成立, 请证明; 若不成立, 请举反例.

证明 (1) 由条件知, $(A + lE)(B + kE) = (kl - 1)E$. 由于 $kl \neq 1$, $A + lE$ 可逆且其逆为 $\frac{B + kE}{kl - 1}$.

(2) (2) 成立. 由上述 $(A + lE)(B + kE) = (kl - 1)E$ 可知 $(B + kE)(A + lE) = (kl - 1)E$, 展开以及由已知条件即可知 $BA = AB$.

六、(12分) 设 n 阶方阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ 的前 $n - 1$ 个列向量线性相关, 后 $n - 1$ 个列向量线性无关, $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$.

(1) 证明: 方程组 $AX = \beta$ 必有无穷多解;

(2) 求方程组 $AX = \beta$ 的通解.

证明 (1) (陈书涵, 方泽锦, 蒋欣怡, 黎想, 林杰, 唐宇轩, 汪管斌, 王敏, 王星瑶, 王宣凯, 吴章航, 吴玉涵, 许宸豪, 姚雨杭, 郑博弈 等)

(1) 由于 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$, 即 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表出, 则 $r(A) = r(A \beta)$. 于是 $AX = \beta$ 有解. 又由于 A 的前 $n - 1$ 个列向量线性相关, 则 $r(A \beta) = r(A) < n$. 特别地, $AX = \beta$ 有无穷多个解.

(2) 由于 A 的前 $n - 1$ 个列向量线性相关, 则 $r(A) \leq (n - 2) + 1 = n - 1$. 又由于 A 的后 $n - 1$ 个列向量线性无关, 则 $r(A) \geq n - 1$. 所以 $r(A) = n - 1$, 即导出组 $AX = O$ 的基础解系含有一个(非零)向量. 且由前面讨论可知 α_1 可由 $\alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ 线性表出(因为 $\alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ 线性无关以及 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ 线性相关), 存在唯一的一组数 $k_2, \dots, k_{n-1} \in F$ 使得

$$\alpha_1 = k_2 \alpha_2 + \dots + k_{n-1} \alpha_{n-1} = k_2 \alpha_2 + \dots + k_{n-1} \alpha_{n-1} + 0 \cdot \alpha_n.$$

由此可知, $A\eta = 0$, 其中 $\eta = (-1, k_2, \dots, k_{n-1}, 0)^T$. 所以向量 η 是导出组 $AX = O$ 的基础解系. 再由 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ 可知 $\gamma = (1, 1, \dots, 1)^T$ 是 $AX = \beta$ 的一个特解. 于是 $AX = \beta$ 的通解为

$$X = \gamma + c\eta, \quad c \in F.$$

常见错误1 未证明为什么 $AX = \beta$ 有解.

常见错误1 写错其导出组 $AX = O$ 的基础解系以及通解表达不完整.

七、(10分)

(1) 设 A 可逆, 证明: $r\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = r(A) + r(D - CA^{-1}B)$;

(2) 设 $M = \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2+1 & \cdots & a_1a_n+1 \\ a_2a_1+1 & a_2^2 & \cdots & a_2a_n+1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_na_1+1 & a_na_2+1 & \cdots & a_n^2 \end{pmatrix}$, 证明: $r(M) \geq n-1$.

证明 (1) 因为 A 可逆, 所以

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A & B \\ O & D - CA^{-1}B \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A & O \\ O & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

或

$$\begin{pmatrix} E & O \\ -CA^{-1} & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & -A^{-1}B \\ O & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O \\ O & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

所以 $r\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = r(A) + r(D - CA^{-1}B)$.

(2) (法一) (杜佳明, 何其锦, 李玉鑫, 刘厚哲, 邱子航, 孙嘉铿, 吴伟鸿, 吴岳, 吴烨衡, 杨泽宇, 张欣榆, 钟铂洋 等) 令 $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, 则 $M = -E_n + A^T A$. 一方面

$$\begin{pmatrix} E_2 & A \\ A^T & E_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} E_2 & A \\ O & E_n - A^T A \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} E_2 & O \\ O & E_n - A^T A \end{pmatrix}$$

另一方面

$$\begin{pmatrix} E_2 & A \\ A^T & E_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} E_2 - AA^T & O \\ A & E_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} E_2 - AA^T & O \\ O & E_n \end{pmatrix}.$$

直接计算有

$$r(E_2 - AA^T) = r \begin{pmatrix} 1 - \sum_{i=1}^n a_i^2 & -\sum_{i=1}^n a_i \\ -\sum_{i=1}^n a_i & 1 - n \end{pmatrix} \geq 1,$$

故 $r(M) = n - 2 + r(E_2 - AA^T) \geq n - 1$.

(法二) (杨弋戈) 因为

$$M = ST, \text{ 其中 } S = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

又因为
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1) \neq 0, \text{ 所以 } r(S) \geq n, r(T) \geq n, \text{ 进而}$$

$$r(M) \geq r(S) + r(T) - (n+1) \geq n + n - (n+1) = n-1.$$

(法三) (高华泰) 记 $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \eta \end{pmatrix}_{2 \times n}$, 同法一证明可得

$$r(M) + 2 = r \begin{pmatrix} E_2 & A \\ A^T & E_n \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \eta \\ \alpha^T & \eta^T & E_n \end{pmatrix} \geq r \begin{pmatrix} 1 & \eta \\ \eta^T & E_n \end{pmatrix} - 2 = r \begin{pmatrix} 1 & \eta \\ 0 & 1 - n \end{pmatrix} = n+1,$$

所以 $r(M) \geq n-1$.

(法四) (张欣榆) 记 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$, 则

$$M = \alpha\alpha^T + C, \text{ 其中 } C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}_{n \times n}.$$

易知 $r(C) = n$. 若 $\alpha = 0$, 则 $M = C$, $r(M) = n \geq n-1$, 命题成立. 若 $\alpha \neq 0$, 则 $r(\alpha\alpha^T) = 1$, $r(M) = r(\alpha\alpha^T + C) \geq r(C) - r(\alpha\alpha^T) = n-1$, 命题成立.

常见错误1 $M = \alpha\alpha^T + C$, 所以 $r(M) \geq r(C)$.

常见错误2 $M + E = (a_i a_j + 1)_{n \times n}$ 经行初等变换化为 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, 所以 $r(M + E) = 1$.

常见错误3 $r(A + B) \geq r(A) + r(B)$.

常见错误4 $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ A_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_i^2 & \sum_{i=1}^n a_i \\ \sum_{i=1}^n a_i & n \end{pmatrix}.$

八、(8分) 设 n 阶方阵 A 满足 $A^2 = O$, 秩 $r(A) = r$. 求证: 若 $1 \leq r < \frac{n}{2}$, 则存在 n 阶可逆矩阵 P , 使得

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} O & E_r & O \\ O & O & O \end{pmatrix}.$$

证明 (法一) (黄伟业, 肖弼诚) 对 A , 存在可逆矩阵 S 和 T , 使得 $A = S \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} T$. 将 TS 分

为 2×2 分块矩阵 $\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}$, 其中 C_1 是 r 阶方阵. 则由 $A^2 = O$, 直接计算得 $C_1 = O$. 进而

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} TS = \begin{pmatrix} O & C_2 \\ O & O \end{pmatrix}.$$

因为 $r(A) = r$, 所以 $r \times (n-r)$ 矩阵 C_2 的秩为 r . 因此存在可逆矩阵 M 和 N , 使得

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} O & M(E_r, O)N \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M & \\ & N^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & E_r & O \\ O & O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M & \\ & N^{-1} \end{pmatrix}^{-1}.$$

令 $P = S \begin{pmatrix} M & \\ & N^{-1} \end{pmatrix}$, 则 P 可逆, 且 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} O & E_r & O \\ O & O & O \end{pmatrix}$.

(法二) (郭佳辉, 姜志远) 因为 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} O & E_r & O \\ O & O & O \end{pmatrix}$ 等价于 $AP = P \begin{pmatrix} O & E_r & O \\ O & O & O \end{pmatrix}$, 因此只要找到 n 个线性无关的列向量 $P_1, P_2, \dots, P_n$ 满足

$$AP_i = 0 \ (i = 1, 2, \dots, r, 2r+1, 2r+2, \dots, n); \ AP_{r+j} = P_j \ (j = 1, 2, \dots, r),$$

则命题得证.

事实上, 设 $P_1, P_2, \dots, P_r$ 是 A 的列向量组的一个极大无关组, 因此 $AX = P_i \ (1 \leq i \leq r)$ 必有解, 设为 $P_{r+i} \ (i = 1, 2, \dots, r)$.

由于 $A^2 = O$, 所以 $AP_i = A^2 P_{r+i} = 0 \ (i = 1, 2, \dots, r)$, 即 $P_1, P_2, \dots, P_r$ 是 $AX = 0$ 的解.

注意到 $r(A) = r$, 所以存在 $AX = 0$ 的解 $P_{2r+1}, P_{2r+2}, \dots, P_n$ 与 $P_1, P_2, \dots, P_r$ 一起凑成 $AX = 0$ 的一个基础解系. 现证如此构造的 $P_1, P_2, \dots, P_n$ 是线性无关的.

设

$$a_1 P_1 + a_2 P_2 + \dots + a_n P_n = 0, \quad (*)$$

将(*)式两边同时左乘 A 得 $a_{r+1} P_1 + a_{r+2} P_2 + \dots + a_{2r} P_r = 0$, 再由 $P_1, P_2, \dots, P_r$ 线性无关即得 $a_i = 0 \ (i = r+2, r+2, \dots, 2r)$.

进一步, 因为 $P_1, P_2, \dots, P_r, P_{2r+1}, P_{2r+2}, \dots, P_n$ 是 $AX=0$ 的基础解系, 得 $a_i = a_j = 0$ ($i=1, 2, \dots, r$; $j=2r+1, 2r+2, \dots, n$). 因此若令 $P = (P_1, P_2, \dots, P_n)$, 则 P 可逆, 且 $AP = P \begin{pmatrix} O & E_r & O \\ O & O & O \end{pmatrix}$, 进而 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} O & E_r & O \\ O & O & O \end{pmatrix}$.

常见错误 由 $r(A) = r$ 得存在可逆矩阵 S , 使得 $S^{-1}AS = \text{diag}(E_r, O)$.

附加题 (10分) 设 $n \geq 2$, A, B 是 n 阶方阵, 且满足 $B^2 = B$. 证明: $r(AB - BA) \leq r(AB + BA)$.

证明 (法一) 由于 $B^2 = B$, 直接计算可得

$$(E - B)(AB + BA)(E - B) = O.$$

结合 Frobenius 不等式 $r(ABC) \geq r(AB) + r(BC) - r(B)$, 得

$$\begin{aligned} 0 &\geq r((E - B)(AB + BA)) + r((AB + BA)(E - B)) - r(AB + BA) \\ &= r(AB - BAB) + r(BA - BAB) - r(AB + BA) \\ &\geq r(AB - BA) - r(AB + BA) \end{aligned}$$

(法二) (曹嘉豪, 姜振坤) 首先证明引理: 若 $B^2 = B$, 则存在可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$, 其中 $r = r(B)$.

事实上, 对 B , 存在可逆矩阵 S, T , 使得 $B = S \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} T$. 将 TS 分为 2×2 分块矩阵 $TS = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}$, 其中 C_1 是 r 阶方阵. 则由 $B^2 = B$, 直接计算得 $C_1 = E_r$. 进而 $S^{-1}BS = \begin{pmatrix} E_r & C_2 \\ O & O \end{pmatrix}$. 令 $P = S \begin{pmatrix} E_r & C_2 \\ O & E_{n-r} \end{pmatrix}$, 则 P 可逆, 且 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$.

现证 $r(AB - BA) \leq r(AB + BA)$. 由引理, 对 B 存在可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ 将 $P^{-1}AP$ 分成 2×2 分块矩阵 $\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$. 直接计算得

$$P^{-1}(AB - BA)P = \begin{pmatrix} O & -A_2 \\ A_3 & O \end{pmatrix}, \quad P^{-1}(AB + BA)P = \begin{pmatrix} 2A_1 & A_2 \\ A_3 & O \end{pmatrix},$$

因此 $r(AB - BA) = r(A_2) + r(A_3) \leq r(AB + BA)$.