



厦门大学《高等代数 (I)》课程试卷

数学,经济学院各,统计,大数据系 2024 年级各 专业

主考教师: 杜妮,阮诗隼,易少云,林鹭 试卷类型: A 卷 考试日期:
24.11.13

一、填空题: (18分. 每题3分, 共6题)

1. 设3阶方阵 $A = (\alpha, \beta, \gamma)$, $B = (\alpha, \beta, \delta)$. 若 $\det A = a$, $\det B = b$, 则行列式 $\det(3A - B) =$ _____.

2. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$, 则与 A 乘积可交换的矩阵 B 形如 _____.

3. 设 $A = (a_{ij})$ 为3阶方阵, A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式, 若 A 的每行元素之和为2, 且 A 的行列式为3, 则 $A_{11} + A_{21} + A_{31} =$ _____.

4. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 并且可由向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表出. 则 _____ (选填“必”“未必”) 存在某个向量 β_j ($j = 1, 2, \dots, t$) 使得向量组 $\beta_j, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关.

5. 设 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$ 经行初等变换化为 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 _____ 是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 的极大线性无关组, 其余向量可用该极大线性无关组表示为 _____.

6. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & x & -1 \\ -1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$, 若存在非零矩阵 B 使得 $AB = O$, 则 $x =$ _____.

二、单选题: (18分, 每题3分, 共6题)

1. 设 A, B, C 均为 n 阶方阵, 以下说法正确的是_____.

(A) $A^2 - E = (A + E)(A - E)$

(B) $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$

(C) 若 $AB = AC$, 则 $B = C$

(D) 若 $AB = O$, 则 $A = O$ 或 $B = O$

2. 设 $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $PAQ =$ _____.

(A) $\begin{pmatrix} a_1 & 2a_2 + 3a_3 & a_3 \\ b_1 & 2b_2 + 3b_3 & 2b_3 \\ c_1 & 2c_2 + 3c_3 & c_3 \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} a_1 & 2a_2 & a_3 \\ b_1 & 2b_2 & b_3 \\ c_1 + 3b_1 & c_2 + 6b_2 & c_3 + 3b_3 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 + 3a_3 & a_3 \\ 2b_1 & 2b_2 + 6b_3 & 2b_3 \\ c_1 & c_2 + 3c_3 & c_3 \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 2b_1 & 2b_2 & 2b_3 \\ c_1 + 6b_1 & c_2 + 6b_2 & c_3 + 6b_3 \end{pmatrix}$

3. 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times m$ 矩阵, 则_____.

(A) $AB = BA$

(B) $r(AB) = r(BA)$

(C) $(AB)^T = B^T A^T$

(D) $\det(AB) = \det(BA)$

4. 已知 n 阶方阵 A, B, C 满足 $ABC = O$, E 是 n 阶单位矩阵, 若

$$r \begin{pmatrix} O & A \\ BC & E \end{pmatrix} = r_1, \quad r \begin{pmatrix} AB & C \\ O & E \end{pmatrix} = r_2, \quad r \begin{pmatrix} E & AB \\ AB & O \end{pmatrix} = r_3,$$

则_____.

(A) $r_1 \leq r_2 \leq r_3$

(B) $r_1 \leq r_3 \leq r_2$

(C) $r_3 \leq r_1 \leq r_2$

(D) $r_2 \leq r_1 \leq r_3$

5. 设向量 $\alpha_1 = (a, 1, -1, 1)^T$, $\alpha_2 = (1, 1, b, a)^T$, $\alpha_3 = (1, a, -1, 1)^T$. 若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 且其中任意两个向量均线性无关, 则_____.

(A) $a = -2, b = 2$

(B) $a \neq -2, b = 2$

(C) $a = 1, b = -1$

(D) $a = 1, b \neq -1$

6. 设3阶方阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$. 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 可以由向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表出, 则_____.

(A) $AX = 0$ 的解均为 $BX = 0$ 的解

(B) $A^T X = 0$ 的解均为 $B^T X = 0$ 的解

(C) $BX = 0$ 的解均为 $AX = 0$ 的解

(D) $B^T X = 0$ 的解均为 $A^T X = 0$ 的解

三、(10分) 计算行列式

$$\begin{vmatrix} a+m & b & c & d \\ a & b+m & c & d \\ a & b & c+m & d \\ a & b & c & d+m \end{vmatrix}.$$

四、(12分) 设 $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ 且 $ABA^{-1} = BA^{-1} + 3E$, 求 B .

五、(12分) 设 $kl \neq 1$, 矩阵 A, B 满足 $AB + kA + lB + E = O$.

(1) 证明: $A + lE$ 可逆并求其逆;

(2) $AB = BA$ 吗? 若成立, 请证明; 若不成立, 请举反例.

六、(12分) 设 n 阶方阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ 的前 $n-1$ 个列向量线性相关, 后 $n-1$ 个列向量线性无关, $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$.

(1) 证明: 方程组 $AX = \beta$ 必有无穷多解;

(2) 求方程组 $AX = \beta$ 的通解.

七、(10分)

(1) 设 A 可逆, 证明: $r \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = r(A) + r(D - CA^{-1}B)$;

(2) 设 $M = \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2+1 & \cdots & a_1a_n+1 \\ a_2a_1+1 & a_2^2 & \cdots & a_2a_n+1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_na_1+1 & a_na_2+1 & \cdots & a_n^2 \end{pmatrix}$, 证明: $r(M) \geq n-1$.

八、(8分) 设 n 阶方阵 A 满足 $A^2 = O$, 秩 $r(A) = r$. 求证: 若 $1 \leq r < \frac{n}{2}$, 则存在 n 阶可逆矩阵 P , 使得

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} O & E_r & O \\ O & O & O \end{pmatrix}.$$

附加题 (10分) 设 $n \geq 2$, A, B 是 n 阶方阵, 且满足 $B^2 = B$. 证明: $r(AB - BA) \leq r(AB + BA)$.

八、(8分) 设 n 阶方阵 A 满足 $A^2 = O$, 秩 $r(A) = r$. 求证: 若 $1 \leq r < \frac{n}{2}$, 则存在 n 阶可逆矩阵 P , 使得

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} O & E_r & O \\ O & O & O \end{pmatrix}.$$

八、(8分) 设 n 阶方阵 A 满足 $A^2 = O$, 秩 $r(A) = r$. 求证: 若 $1 \leq r < \frac{n}{2}$, 则存在 n 阶可逆矩阵 P , 使得

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} O & E_r & O \\ O & O & O \end{pmatrix}.$$

八、(8分) 设 n 阶方阵 A 满足 $A^2 = O$, 秩 $r(A) = r$. 求证: 若 $1 \leq r < \frac{n}{2}$, 则存在 n 阶可逆矩阵 P , 使得

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} O & E_r & O \\ O & O & O \end{pmatrix}.$$

八、(8分) 设 n 阶方阵 A 满足 $A^2 = O$, 秩 $r(A) = r$. 求证: 若 $1 \leq r < \frac{n}{2}$, 则存在 n 阶可逆矩阵 P , 使得

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} O & E_r & O \\ O & O & O \end{pmatrix}.$$

八、(8分) 设 n 阶方阵 A 满足 $A^2 = O$, 秩 $r(A) = r$. 求证: 若 $1 \leq r < \frac{n}{2}$, 则存在 n 阶可逆矩阵 P , 使得

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} O & E_r & O \\ O & O & O \end{pmatrix}.$$

八、(8分) 设 n 阶方阵 A 满足 $A^2 = O$, 秩 $r(A) = r$. 求证: 若 $1 \leq r < \frac{n}{2}$, 则存在 n 阶可逆矩阵 P , 使得

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} O & E_r & O \\ O & O & O \end{pmatrix}.$$

八、(8分) 设 n 阶方阵 A 满足 $A^2 = O$, 秩 $r(A) = r$. 求证: 若 $1 \leq r < \frac{n}{2}$, 则存在 n 阶可逆矩阵 P , 使得

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} O & E_r & O \\ O & O & O \end{pmatrix}.$$

八、(8分) 设 n 阶方阵 A 满足 $A^2 = O$, 秩 $r(A) = r$. 求证: 若 $1 \leq r < \frac{n}{2}$, 则存在 n 阶可逆矩阵 P , 使得

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} O & E_r & O \\ O & O & O \end{pmatrix}.$$

八、(8分) 设 n 阶方阵 A 满足 $A^2 = O$, 秩 $r(A) = r$. 求证: 若 $1 \leq r < \frac{n}{2}$, 则存在 n 阶可逆矩阵 P , 使得

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} O & E_r & O \\ O & O & O \end{pmatrix}.$$

八、(8分) 设 n 阶方阵 A 满足 $A^2 = O$, 秩 $r(A) = r$. 求证: 若 $1 \leq r < \frac{n}{2}$, 则存在 n 阶可逆矩阵 P , 使得

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} O & E_r & O \\ O & O & O \end{pmatrix}.$$