



厦门大学《高等代数(II)》课程试卷

数学学院各系 2022 年级各专业

主考教师：杜妮 试卷类型：A 卷 考试日期：2023.06.21

一、填空题: (18分, 每题3分, 共6题)

1. 设 A 为 n 阶正定矩阵, 非零列向量 $X_1, X_2, \dots, X_n \in \mathbb{R}^n$ 满足 $X_i^T A X_j = 0 (1 \leq i \neq j \leq n)$, 则 X_1, X_2, \dots, X_n _____ (选填 “线性相关”, “线性无关”, “不能确定”).

2. 已知 ξ_1, ξ_2, ξ_3 是 3 维欧氏空间 V 的一个基, 其度量矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, 若 $\beta = \xi_1 + 2\xi_2 - \xi_3$, 则 β 的长度为 _____.

3. 已知 3 阶实对称矩阵 A 满足 $A^2 + 3A = 0$, 且 $r(A) = 1$, 则 A 在 \mathbb{C} 上的规范形是 _____, A 在 \mathbb{R} 上的正交相似标准形为 _____.

4. 已知 α, β 是 n 维欧氏空间 V 中的两个不同的单位向量, 则存在 V 的镜面反射 $\varphi: \varphi(X) = X - 2(\eta, X)\eta$, 其中 $\eta =$ _____, 使得 $\varphi(\alpha) = \beta$.

5. 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 + x_1)^2$ 的秩是 _____.

6. 设 $abc > 0$, 则实二次型 $f(x, y, z) = ayz + bzx + cxy$ 的正惯性指数 = _____, 负惯性指数 = _____.

二、选择题: (18分, 每题3分, 共6题)

1. 设 $\alpha = (a_1, a_2)^T$, $\beta = (b_1, b_2)^T$ 是2维列向量空间 \mathbb{R}^2 中任意两个向量, 则 \mathbb{R}^2 是关于内积_____的欧氏空间.

(A) $(\alpha, \beta) = \max\{a_1, a_2, b_1, b_2\}$

(B) $(\alpha, \beta) = |a_1| + |a_2| + |b_1| + |b_2|$

(C) $(\alpha, \beta) = 2a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + 2a_2b_2$

(D) $(\alpha, \beta) = a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_2b_2$

2. 设 U_1, U_2 均是 n 维内积空间 V 的子空间, 则下列命题中正确的有_____个.

(1) $(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp + U_2^\perp$

(2) $(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$

(3) $(U_1 \cap U_2)^\perp = U_1^\perp + U_2^\perp$

(4) $(U_1 \cap U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

3. 设 φ 是 n 维欧氏空间 V 的线性变换, 则 φ 为对称变换的充要条件是_____.

(A) φ 的特征值全是实数

(B) φ 的特征向量两两正交

(C) φ 在某一个基下的矩阵是对称矩阵

(D) φ 在任一个标准正交基下的矩阵是对称矩阵

4. 下列矩阵中与 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 合同的是_____.

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

5. 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在正交线性替换 $X = PY$ 下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$, 其中 $P = (P_1, P_2, P_3)$. 若 $Q = (P_1, -P_3, P_2)$, 则 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在正交变换 $X = QZ$ 下的标准形为_____.

(A) $2z_1^2 - z_2^2 + z_3^2$

(B) $2z_1^2 + z_2^2 - z_3^2$

(C) $2z_1^2 - z_2^2 - z_3^2$

(D) $2z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$

6. 若 A 是3阶负定矩阵, 则以下说法**错误**的是_____.

A. A^{-1} 为负定矩阵

B. A^* 为负定矩阵

C. $3A$ 为负定矩阵

D. A^3 为负定矩阵

三、(12分)

设3阶实对称矩阵 A 的各行元素之和为6, 向量 $X_1 = (-1, 2, -1)^T$ 和 $X_2 = (0, -1, 1)^T$ 是线性方程组 $AX = 0$ 的两个解.

(1) 求正交矩阵 P , 使得 P^TAP 为对角阵;

(2) 求 $(A - 3E)^4$.

四、(12分)

若 A 是 $n \times m$ 实矩阵且 $r(A) = m$, 则 $A = QR$, 其中 $Q^TQ = E_m$, 且 R 是上三角形矩阵且主对角线元素大于0.

五、(12分)

设 A 是正交矩阵, 则 $\det A = 1$ 的充要条件是存在正交矩阵 B , 使得 $A = B^2$.

六、(10分)

设实二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的正、负惯性指数分别为 p 和 $n-p$ 且 $2p \leq n$, 证明: 存在 \mathbb{R}^n 的 p 维子空间 U , 使得对于任意 $\alpha \in U$, 均有 $f(\alpha) = 0$.

七、(10分) 设 A 是 n 阶正定矩阵($n > 1$), $\alpha \in \mathbb{R}^n$, 且 α 是非零列向量. 又设 $B = A\alpha\alpha^T$. 求 B 的最大特征值以及 B 的属于这个特征值的特征子空间的维数和一个基.

八、(8分)

设 A, B 为 n 阶正定矩阵, 令 $U = \{X \in \mathbb{R}^n | X^TAX \leq 1\}$, $W = \{X \in \mathbb{R}^n | X^TBX \leq 1\}$, 证明: $U \subseteq W$ 的充要条件是 $B - A$ 是半负定矩阵.

附加题 (10分)

设 A 是 n 阶可逆实对称矩阵, A_1, A_2 是 m 阶可逆实对称方阵, 若 $\begin{pmatrix} A & \\ & A_1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} A & \\ & A_2 \end{pmatrix}$ 合同, 证明: A_1 与 A_2 合同.(不用惯性定理)