



厦门大学《高等代数(II)》课程试卷

数学学院各系 2022 年级各专业

主考教师：杜妮 试卷类型：A 卷 考试日期：2023.06.21

一、填空题: (18分, 每题3分, 共6题)

1. 设 A 为 n 阶正定矩阵, 非零列向量 $X_1, X_2, \dots, X_n \in \mathbb{R}^n$ 满足 $X_i^T A X_j = 0 (1 \leq i \neq j \leq n)$, 则 X_1, X_2, \dots, X_n _____ (选填 “线性相关”, “线性无关”, “不能确定”). 线性无关

2. 已知 ξ_1, ξ_2, ξ_3 是 3 维欧氏空间 V 的一个基, 其度量矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, 若 $\beta = \xi_1 + 2\xi_2 - \xi_3$, 则 β 的长度为 _____. $2\sqrt{2}$

3. 已知 3 阶实对称矩阵 A 满足 $A^2 + 3A = 0$, 且 $r(A) = 1$, 则 A 在 \mathbb{C} 上的规范形是 _____, A 在 \mathbb{R} 上的正交相似标准形为 _____. $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$

4. 已知 α, β 是 n 维欧氏空间 V 中的两个不同的单位向量, 则存在 V 的镜面反射 $\varphi: \varphi(X) = X - 2(\eta, X)\eta$, 其中 $\eta =$ _____, 使得 $\varphi(\alpha) = \beta$. $\frac{\alpha - \beta}{|\alpha - \beta|}$

5. 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 + x_1)^2$ 的秩是 _____. 2

6. 设 $abc > 0$, 则实二次型 $f(x, y, z) = ayz + bzx + cxy$ 的正惯性指数 = _____, 负惯性指数 = _____. 1, 2

二、选择题: (18分, 每题3分, 共6题)

1. 设 $\alpha = (a_1, a_2)^T$, $\beta = (b_1, b_2)^T$ 是 2 维列向量空间 \mathbb{R}^2 中任意两个向量, 则 \mathbb{R}^2 是关于内积_____的欧氏空间. **C**

(A) $(\alpha, \beta) = \max\{a_1, a_2, b_1, b_2\}$

(B) $(\alpha, \beta) = |a_1| + |a_2| + |b_1| + |b_2|$

(C) $(\alpha, \beta) = 2a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + 2a_2b_2$

(D) $(\alpha, \beta) = a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_2b_2$

2. 假设 U_1, U_2 均是 n 维内积空间 V 的子空间, 则下列命题中正确的有_____个. **B**

(1) $(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp + U_2^\perp$

(2) $(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$

(3) $(U_1 \cap U_2)^\perp = U_1^\perp + U_2^\perp$

(4) $(U_1 \cap U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

3. 设 φ 是 n 维欧氏空间 V 的线性变换, 则 φ 为对称变换的充分必要条件是_____. **D**

(A) φ 的特征值全是实数

(B) φ 的特征向量两两正交

(C) φ 在某一个基下的矩阵是对称阵

(D) φ 在任一个标准正交基下的矩阵是对称阵

4. 下列矩阵中与 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 合同的是_____. **C**

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

5. 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在正交线性替换 $X = PY$ 下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$, 其中 $P = (P_1, P_2, P_3)$. 若 $Q = (P_1, -P_3, P_2)$, 则 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在正交变换 $X = QZ$ 下的标准形为_____. **A**

(A) $2z_1^2 - z_2^2 + z_3^2$

(B) $2z_1^2 + z_2^2 - z_3^2$

(C) $2z_1^2 - z_2^2 - z_3^2$

(D) $2z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$

6. 若 A 是 3 阶负定矩阵, 则以下说法**错误**的是_____. **B**

A. A^{-1} 为负定矩阵

B. A^* 为负定矩阵

C. $3A$ 为负定矩阵

D. A^3 为负定矩阵.

三、(12分)

设3阶实对称矩阵 A 的各行元素之和为6, 向量 $X_1 = (-1, 2, -1)^T$ 和 $X_2 = (0, -1, 1)^T$ 是线性方程组 $AX = 0$ 的两个解.

(1) 求正交矩阵 P , 使得 P^TAP 为对角阵;

(2) 求 $(A - 3E)^4$.

解 (陈珂楠、傅凌瑶、李欣然、徐睿岩、郑旭阳、陈伟舰、洪竞铭、王与乐、程禹、林德耿、陈筱锋、方泽侗、吕阳、夏宇轩、万泽棋、王跃衡、许景宣、张梦扬、郑力炫、朱成杰、吴贾茗彦等)

(1) 由题意可知

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

所以 A 的一个特征值为6且其对应的特征向量为 $X_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

又由已知条件 X_1 和 X_2 为特征值0的两个线性无关的特征向量.从而可得 X_1, X_2, X_3 线性无关且构成了一组基.

然后对它们进行Schmidt 正交化得

$$\begin{aligned} Y_1 &= X_1 = (-1, 2, -1)^T, \\ Y_2 &= X_2 - \frac{(X_2, Y_1)}{(Y_1, Y_1)} Y_1 = (-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})^T, \\ Y_3 &= X_3 - \frac{(X_3, Y_1)}{(Y_1, Y_1)} Y_1 - \frac{(X_3, Y_2)}{(Y_2, Y_2)} Y_2 = (1, 1, 1)^T = X_3. \end{aligned}$$

最后将 Y_1, Y_2, Y_3 进行单位化得

$$\begin{aligned} Z_1 &= (-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}})^T, \\ Z_2 &= (-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})^T, \\ Z_3 &= (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})^T. \end{aligned}$$

从而所求的正交矩阵

$$P = (Z_1, Z_2, Z_3) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix},$$

且

$$P^T A P = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 6 \end{bmatrix}.$$

(2) 由(1)可得

$$\begin{aligned} (A - 3E)^4 &= \left(P \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 6 \end{bmatrix} P^T - 3E \right)^4 = \left(P \left(\begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 6 \end{bmatrix} - 3E \right) P^T \right)^4 \\ &= P \left(\begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 6 \end{bmatrix} - 3E \right)^4 P^T = P \begin{bmatrix} 81 & & \\ & 81 & \\ & & 81 \end{bmatrix} P^T \\ &= 81 P P^T = 81 E_3. \end{aligned}$$

常见错误 不能正确得算出正交矩阵 P .

四、(12分)

若 A 是 $n \times m$ 实矩阵且 $r(A) = m$, 则 $A = QR$, 其中 $Q^T Q = E_m$, 且 R 是上三角形矩阵且主对角线元素大于0.

证明 (何奕晗、张旭、黄秉章、沈仁祥、仇垚鑫、欧佳俊、刘哲涵、王翊君、祝颖鹏、陈浩、兰景琪、王俊杰等)

设 $A = (A_1, \dots, A_m)$, $A_i \in \mathbb{R}^n$, $1 \leq i \leq m$. 因为 $r(A) = m$, 所以 A_1, \dots, A_m 线性无关. 然后将之Schmidt 正交化, 使得

$$\langle A_1, \dots, A_m \rangle = \langle \beta_1, \dots, \beta_m \rangle,$$

其中

$$\beta_1 = A_1, \dots, \beta_i = A_i - \frac{(A_i, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 - \dots - \frac{(A_i, \beta_{i-1})}{(\beta_{i-1}, \beta_{i-1})} \beta_{i-1}, \dots, \quad 1 \leq i \leq m.$$

于是有

$$A = (A_1, \dots, A_m) = (\beta_1, \dots, \beta_m) \begin{bmatrix} 1 & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

最后将之单位化, 得

$$A = (A_1, \cdots, A_m) = (\gamma_1, \cdots, \gamma_m) \begin{bmatrix} |\beta_1| & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & |\beta_m| \end{bmatrix} = QR.$$

容易验证 $Q^T Q = E_m$ 以及 R 是上三角矩阵且主对角线元素大于0.

常见错误 没能注意到此时的矩阵 A 不再是方阵; 不知道如何处理一般的矩阵.

五、(12分)

设 A 是正交矩阵, 则 $\det A = 1$ 的充分必要条件是存在正交矩阵 B , 使得 $A = B^2$.

证明 (胡傲文、李原蓁、曾思琢、钱鑫、夏世威、刘俊玮、王宇轩、何锦弘、黄杰、李瑾慧、李子帆、林毅、叶一楠、庄博诚等)

充分性: 由 $A = B^2$ 和 B 为正交矩阵, 取行列式有 $|A| = |B|^2 = 1$.

必要性: 因为 A 是正交矩阵, 所以存在正交矩阵 Q 使得

$$Q^T A Q = \begin{bmatrix} E_s & & & & & \\ & -E_t & & & & \\ & & \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & & \\ & & \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \cos \theta_\ell & -\sin \theta_\ell \\ & & & & & \sin \theta_\ell & \cos \theta_\ell \end{bmatrix}, \quad s+t+2\ell = n.$$

取行列式有 $|A| = (-1)^t = 1$, 所以 t 为偶数, 记 $t = 2k$. 令 $-E_t$ 矩阵块为

$$\begin{bmatrix} -E_2 & & & \\ & -E_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -E_2 \end{bmatrix}.$$

注意到

$$-E_2 = \begin{bmatrix} -1 & \\ & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & 1 \\ -1 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & 1 \\ -1 & \end{bmatrix}.$$

令 $W = \begin{bmatrix} & 1 \\ -1 & \end{bmatrix}$, 则有 $WW^T = E_2$, 即 W 为正交矩阵. 另一方面, 对于任意的 $1 \leq i \leq \ell$, 有

$$\begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta_i}{2} & -\sin \frac{\theta_i}{2} \\ \sin \frac{\theta_i}{2} & \cos \frac{\theta_i}{2} \end{bmatrix}^2, \quad \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta_i}{2} & -\sin \frac{\theta_i}{2} \\ \sin \frac{\theta_i}{2} & \cos \frac{\theta_i}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta_i}{2} & -\sin \frac{\theta_i}{2} \\ \sin \frac{\theta_i}{2} & \cos \frac{\theta_i}{2} \end{bmatrix}^T = E_2.$$

所以

$$A = B^2,$$

其中

$$B = Q^T \begin{bmatrix} E_s & & & & & \\ & W & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & W & & \\ & & & & \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta_1}{2} & -\sin \frac{\theta_1}{2} \\ \sin \frac{\theta_1}{2} & \cos \frac{\theta_1}{2} \end{bmatrix} & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta_\ell}{2} & -\sin \frac{\theta_\ell}{2} \\ \sin \frac{\theta_\ell}{2} & \cos \frac{\theta_\ell}{2} \end{bmatrix} \end{bmatrix} Q.$$

常见错误 在证明“必要性”时，不能正确得到矩阵 $W = \begin{bmatrix} & 1 \\ -1 & \end{bmatrix}$ 以及 $\begin{bmatrix} \cos \frac{\theta_i}{2} & -\sin \frac{\theta_i}{2} \\ \sin \frac{\theta_i}{2} & \cos \frac{\theta_i}{2} \end{bmatrix}$.

六、(10分)

设实二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的正、负惯性指数分别为 p 和 $n-p$ 且 $2p \leq n$, 证明: 存在 \mathbb{R}^n 的 p 维子空间 U , 使得对于任意 $\alpha \in U$, 均有 $f(\alpha) = 0$.

证明 方法一 (傅凌瑶、何奕晗、王与乐、张旭、夏世威、程禹、林德耿、陈筱锋、方泽侗、王翊君、毋奇、夏宇轩、陈浩、兰景琪、万泽棋、王俊杰、张弛、张梦扬、郑力炫、邢梓韬、朱成杰等)

设 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X^T A X$ 且存在可逆矩阵 C , 使得

$$C^T A C = \begin{bmatrix} E_p & \\ & -E_{n-p} \end{bmatrix}, \quad 2p \leq n.$$

令 $\beta_i = \varepsilon_i + \varepsilon_{i+p}$. 由于 $2p \leq n$, 则有 β_1, \dots, β_p 线性无关且

$$\beta_i^T C^T A C \beta_i = 0, \quad 1 \leq i \leq p.$$

令 $\alpha_i = C \beta_i, 1 \leq i \leq p$. 因为 C 可逆, 所以 $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ 也线性无关且

$$f(\alpha_i) = \alpha_i^T A \alpha_i = 0.$$

另一方面, 容易得出

$$\alpha_i^T A \alpha_j = 0, \quad 1 \leq i \neq j \leq p.$$

令 $U = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_p \rangle$. 则有 $\dim U = p$ 且对于任意的 $\alpha = a_1 \alpha_1 + \dots + a_p \alpha_p \in U$ 均有

$$f(\alpha) = \alpha^T A \alpha = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p a_i a_j \alpha_i^T A \alpha_j = 0.$$

方法二 (李欣然、胡傲文、仇垚鑫、钱鑫等)

设 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 经过可逆线性替换化为 $y_1^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_n^2$. 令 $\beta_i = \varepsilon_i + \varepsilon_{i+p}$. 由于 $2p \leq n$, 则有 β_1, \dots, β_p 线性无关. 令 $\alpha_i = C\beta_i, 1 \leq i \leq p$. 因为 C 可逆, 所以 $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ 也线性无关且 $f(\alpha_i) = 0$. 令 $U = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_p \rangle$, 则 $\dim U = p$ 且对于任意 $\alpha \in U$, 均有 $f(\alpha) = 0$.

常见错误 未能准确构造出符合要求的 p 维子空间的一组基.

七、(10分)

设 A 是 n 阶正定矩阵 ($n > 1$), $\alpha \in \mathbb{R}^n$, 且 α 是非零列向量. 又设 $B = A\alpha\alpha^T$. 求 B 的最大特征值以及 B 的属于这个特征值的特征子空间的维数和一个基.

解 (胡傲文、李原蓁、曾思琢、卢子杰、黄秉章、王宇轩、黄杰等)

考虑 $|\lambda E - B| = 0$, 得

$$|\lambda E - A\alpha\alpha^T| = \lambda^{n-1} |\lambda - \alpha^T A \alpha| = \lambda^{n-1} (\lambda - \alpha^T A \alpha).$$

因为 A 是正定矩阵且 $\alpha \neq \mathbf{0}$, 则有 $\alpha^T A \alpha > 0$. 故 B 的特征值为

$$\lambda_1 = 0 \ (n-1 \text{重}), \quad \lambda_2 = \alpha^T A \alpha > 0.$$

因此 $\alpha^T A \alpha$ 为 B 的最大特征值以及其特征子空间的维数为 1. 另外我们注意到

$$B(A\alpha) = A\alpha\alpha^T A \alpha = (\alpha^T A \alpha)(A\alpha).$$

由条件 A 为正定矩阵和 $\alpha \neq \mathbf{0}$ 可知, $A\alpha \neq \mathbf{0}$. 所以 $\{A\alpha\}$ 为特征值 $\alpha^T A \alpha$ 的特征子空间的一个基.

常见错误 没能正确得找出最大特征值的特征子空间的一个基.

八、(8分)

设 A, B 为 n 阶正定矩阵, 令 $U = \{X \in \mathbb{R}^n | X^T A X \leq 1\}$, $W = \{X \in \mathbb{R}^n | X^T B X \leq 1\}$, 证明: $U \subseteq W$ 的充要条件是 $B - A$ 是半负定矩阵.

证明 (钱鑫、沈仁祥、刘俊玮、吕阳、祝颖鹏、何锦弘、李瑾慧、李子帆、林毅、许景宣、叶一楠、庄博诚)

充分性: 设 $B-A$ 是半负定矩阵。则对于任意 $X \in \mathbb{R}^n$, 有

$$X^T(B-A)X \leq 0 \Rightarrow X^TBX - X^TAX \leq 0 \Rightarrow X^TBX \leq X^TAX.$$

根据 U 和 W 的定义, 容易看出 $U \subseteq W$.

必要性: 反证法: 假设 $B-A$ 不是半负定矩阵. 记 $B-A$ 的正、负惯性指数为 p, q . 则存在可逆矩阵 C 使得

$$C^T(B-A)C = \begin{bmatrix} E_p & & \\ & -E_q & \\ & & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad p > 0.$$

取 $Y = \varepsilon_1 = (1, 0, \dots, 0)^T$. 则有

$$Y^TC^T(B-A)CY = 1 > 0.$$

令 $X = CY$. 由于 C 可逆且 $Y \neq \mathbf{0}$, 可知 $X \neq \mathbf{0}$. 于是上述式子可以改写成 $X^T(B-A)X = 1 > 0$, 即

$$X^TBX = 1 + X^TAX.$$

根据条件, A 和 B 均为正定矩阵. 记 $X^TAX = a > 0$ 和 $X^TBX = b > 0$. 取

$$X_0 = \frac{1}{\sqrt{a}}X \neq \mathbf{0}.$$

于是有 $X_0^TAX_0 = 1$ 且 $X_0^TBX_0 = \frac{1}{a} + 1 > 1$, 即有 $X_0 \in U$ 且 $X_0 \notin W$. 这与 $U \subseteq W$ 矛盾.

常见错误 必要性的证明不严谨完善.

附加题 (10分)

设 A 是 n 阶可逆实对称矩阵, A_1, A_2 是 m 阶可逆实对称方阵, 若 $\begin{pmatrix} A & \\ & A_1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} A & \\ & A_2 \end{pmatrix}$ 合同, 证明: A_1 与 A_2 合同.

证明 参见高等代数学习辅导书P.308.