



厦门大学《高等代数（II）》课程试卷

数学,经济学院各,统计,邹院系 2023,2022 年级各 专业

主考教师: 杜妮,林鹭,阮诗隼,陈继勇 试卷类型: A 卷 考试日期:

2024.05.10

一、填空题: (18分. 每题3分, 共6题)

1. 设 $A = \begin{pmatrix} 6 & -10 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, 则迹 $\text{tr}(A^{2024}) = \underline{\hspace{2cm}} \cdot 2^{2024} + 1$

2. 设 $(1, a, 0)^T, (1, 1, 1)^T, (2, 1, 0)^T$ 分别是 A 的属于特征值 $0, 1, -1$ 的特征向量, 则 a 满足 $\underline{\hspace{2cm}}$.
 $a \neq \frac{1}{2}$

3. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, 将 A^{-1} 表示为 A 的多项式 $\underline{\hspace{2cm}} \cdot \frac{3}{2}E - \frac{1}{2}A$

4. 设3阶方阵 A 的特征矩阵 $\lambda E - A$ 相抵于 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^2 + \lambda & (\lambda + 1)^2 \end{pmatrix}$, 则 $\lambda E - A$ 的法式是 $\underline{\hspace{2cm}}$,

A 的Jordan标准形是 $\underline{\hspace{2cm}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda + 1)^2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

5. 设 $A = \begin{pmatrix} F(\lambda^3 + \lambda) & & \\ & C & \\ & & F(\lambda^2 + 1) \end{pmatrix}$, 其中 C 是右上角元为1, 其余元均为0的矩阵, 则 A 的Frobenius

标准形为 $\underline{\hspace{2cm}}$, A 在 \mathbb{R} 上的广义Jordan标准形为 $\underline{\hspace{2cm}} \cdot \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ & 1 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & -2 \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & -1 & & \\ & 1 & 0 & & \\ & & 1 & 0 & -1 \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$

6. 设 φ 是线性空间 V 的线性变换, 且在 V 的某个基下矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$, 则 φ 的根子空间 $R(1) = \text{Ker } \underline{\hspace{2cm}} = \text{Im } \underline{\hspace{2cm}} \cdot (\varphi - \text{id}_V)^2; \varphi - 2\text{id}_V$

二、单选题: (18分, 每题3分, 共6题)

1. 设 A 的特征多项式 $f_A(\lambda) = \lambda^3(\lambda - 1)^2$, 则_____. **B**

(A) $5 - r(A) = 3$

(B) $5 - r(A) \leq 3$

(C) $5 - r(A) \geq 3$

(D) $5 - r(A)$ 与3没有大小关系

2. 设 λ_1, λ_2 是 A 的两个不同特征值, 对应的特征向量分别为 α_1, α_2 , 则 $\alpha_1, A(\alpha_1 + \alpha_2)$ 线性相关的充要条件是_____. **D**

(A) $\lambda_1 \neq 0$

(B) $\lambda_2 \neq 0$

(C) $\lambda_1 = 0$

(D) $\lambda_2 = 0$

3. 下列2阶方阵中, _____不相似于 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. **B**

(A) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

4. 设 $A(\lambda), B(\lambda)$ 都是 n 阶 λ -矩阵, 下列叙述中_____是正确的. **C**

(A) $\deg(A(\lambda)B(\lambda)) = \deg A(\lambda) + \deg B(\lambda)$

(B) 若 $A(\lambda)B(\lambda) = O$, 则 $A(\lambda) = O$ 或 $B(\lambda) = O$

(C) 若 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 有相同的法式, 则 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 相抵

(D) 若 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 有相同的初等因子组, 则 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 相抵

5. 若5阶方阵 A 的极小多项式 $m_A(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 1)$, 且秩 $r(A) = 3$, 则在不计Jordan块次序下, A 可能的Jordan标准形有_____个. **B**

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

6. 设复方阵 A 有两个非1的不变因子, 则下列结论正确的有_____个. **D**

a. A 至少有一个特征子空间维数大于1

b. A 至少有一个根子空间不是循环子空间

c. A 的行列式因子与 A 的不变因子不同

d. A 的特征多项式不等于 A 的极小多项式

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

三、(12分) 设方阵 A 的行列式 $\det A = 18$, 且 $3A + A^* = 15E$, 其中 A^* 为 A 的伴随矩阵, E 为单位矩阵.

(1) 求 A 的一个零化多项式;

(2) 求 A 的极小多项式;

(3) 求 A 的Jordan标准形.

要求写出过程.

解 (1) 因为 $\det A = 18$, 将等式 $3A + A^* = 15E$ 两边同时左乘 A 得: $3A^2 + 18E = 15A$, 因此 $A^2 - 5A + 6E = O$. 可见 $\lambda^2 - 5\lambda + 6$ 为 A 的一个零化多项式.

(2) 由(1)可知: $m_A(\lambda) \mid (\lambda - 2)(\lambda - 3)$, 那么 A 的特征值为2或3.

若 A 的特征值全为2, 则 $\det A = 2^n$, 与 $\det A = 18$ 矛盾. 若 A 的特征值全为3, 则 $\det A = 3^n$, 与 $\det A = 18$ 矛盾. 因此2与3均为 A 的特征值, $m_A(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 3)$.

(3) $\det A = 18 = 2 \times 3^2$, 可见 $f_A(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 3)^2$. 从而得初等因子组为: $\lambda - 2, \lambda - 3, \lambda - 3$, 矩阵 A 可对角化, A 的Jordan标准形为 $\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 3 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$.

常见错误1 第2小问中, 没有排除特征值全为2或全为3的可能.

常见错误2 若 A 的特征值全为2, 则 $A = 2E$.

常见错误3 第3小问中, 没有证明矩阵可对角化, 直接得Jordan标准型为对角矩阵.

四、(12分) 设 A 是 n 阶方阵, α, β 是 n 维列向量. 证明: $A\alpha\beta^T$ 可对角化的充要条件是 $\beta^T A\alpha \neq 0$ 或者 $A\alpha\beta^T = O$.

证明 考虑 $A\alpha\beta^T$ 的特征多项式, 由降阶公式, 有

$$f_{A\alpha\beta^T}(\lambda) = \det(\lambda E_n - (A\alpha)(\beta^T)) = \lambda^{n-1} \det(\lambda E_1 - (\beta^T)(A\alpha)) = \lambda^{n-1}(\lambda - \beta^T A\alpha).$$

从而 $A\alpha\beta^T$ 的特征值为0($n-1$ 个), $\beta^T A\alpha$.

必要性 若 $A\alpha\beta^T$ 可对角化, 则 $A\alpha\beta^T$ 相似于 $\text{diag}(0, \dots, 0, \beta^T A\alpha)$. 进而若 $\beta^T A\alpha = 0$, 则 $A\alpha\beta^T = O$.

充分性 注意到当 $A\alpha\beta^T = O$ 时矩阵可对角化. 只要证明 $\beta^T A\alpha \neq 0$ 时矩阵可对角化.

(法一) 矩阵 $A\alpha\beta^T$ 可以看作由 n 维列向量 $A\alpha$ 与 n 维行向量 β^T 相乘得到, 故其秩 $r(A\alpha\beta^T) \leq 1$, 从而其Jordan标准形只能为 $\text{diag}(0, \dots, 0, \beta^T A\alpha)$. 因此 $A\alpha\beta^T$ 可对角化.

(法二) 由 $A\alpha\beta^T A\alpha\beta^T = (\beta^T A\alpha)A\alpha\beta^T$ 知 $m(\lambda) = \lambda(\lambda - \beta^T A\alpha)$ 为其零化多项式.

又极小多项式整除零化多项式, 且在不计重数的情况下有与特征多项式相同的根, 故 $m(\lambda)$ 即为其极小多项式. 最后由极小多项式无重根得 $A\alpha\beta^T$ 可对角化.

五、(12分) 设 $m_A(\lambda)$ 是 n 阶方阵 A 的极小多项式, $g(\lambda)$ 是非常数多项式. 证明: $g(A)$ 可逆的充要条件是 $(g(\lambda), m_A(\lambda)) = 1$.

证明 充分性 因 $(g(\lambda), m_A(\lambda)) = 1$, 所以存在 $u(\lambda), v(\lambda)$, 使得 $u(\lambda)g(\lambda) + v(\lambda)m_A(\lambda) = 1$. 从而 $E = u(A)g(A) + v(A)m_A(A) = u(A)g(A)$, 因此 $g(A)$ 可逆.

必要性 反证法. 若不然 $(g(\lambda), m_A(\lambda)) = d(\lambda) \neq 1$, 则存在 $c \in C$, 使得 $d(c) = 0$, 从而 $m_A(c) = 0$, 且 $g(c) = 0$.

$m_A(c) = 0$, 说明 c 是 A 的特征值, $\det(A - cE) = 0$.

$g(c) = 0$, 说明 c 是 $g(\lambda)$ 的根, 从而 $g(\lambda) = (\lambda - c)g_1(\lambda)$. 因此 $g(A) = (A - cE)g_1(A)$, 两边同取行列式, 得 $\det g(A) = \det(A - cE) \det g_1(A) = 0$, 与 $g(A)$ 可逆矛盾.

六、(12分) 设 A 是 $n(n > 1)$ 阶复方阵, 满足 $A^n = O, A^{n-1} \neq O$. 证明: 不存在 n 阶方阵 X , 使得 $X^2 = A$.

证明 (法一) (黄慈娴, 洪宥圣, 柯鸿霖, 柯嘉惠, 柯智元, 李涛涛, 孙悦, 陶慧敏, 杨宪邦) 若存

在 X 使得 $X^2 = A$. 首先由于 $A^n = O, A^{n-1} \neq O$, 故 $m_A(\lambda) = \lambda^n$, A 的Jordan标准形为

$$\begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$r(A) = n - 1$.

由于 $X^{2n} = A^n = O$, X 为幂零矩阵, X 的特征值全为0, $r(X) \geq r(X^2) = r(A) = n - 1$. 若 $r(X) = n$,

与 $r(X)$ 幂零矛盾, 舍去. 则 $r(X) = n - 1$, 此时 X 的Jordan标准形为 $J_X =$

$$\begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

X^2 相似于 $J_X^2 =$

$$\begin{pmatrix} 0 & & & \\ 0 & 0 & & \\ 1 & 0 & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

则 $r(X^2) = n - 2 \neq r(A)$, 矛盾. 故不存在 X 使得 $X^2 = A$.

(法二) (汤圣龙, 王良涛) 若存在 X 使得 $X^2 = A$, 由于 $X^{2n} = A^n = O$, X 为幂零矩阵, X 的特征值全为0, 故 $m_X(\lambda)$ 形如 $\lambda^k, k \in \mathbb{Z}$. 又 $X^{2n-2} = A^{n-1} \neq O$, 则 $f(\lambda) = \lambda^{2n-2}$ 不是 X 的一个零化多项式, $k > 2n - 2$. 但 $m_X(\lambda) | f_X(\lambda)$ 而 $\deg f_X(\lambda) = n$, 有 $k \leq n$. 故有 $2n - 2 < k \leq n$, 得 $n = 1$, 矛盾. 故不存在 X 使得 $X^2 = A$.

常见错误1 不加证明直接陈述不存在 X , 使得 $X^2 = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

常见错误2 由于 $O = X^{2n} = AX^{2n-2}$, 且 $X^{2n-2} \neq O$, 所以 $A = O$.

七、(10分) 设 \mathbb{C} 上 n 维线性空间 V 的线性变换 φ, ψ 满足 $0 < \dim \text{Im} \varphi^2 = \dim \text{Im} \varphi < n$, 且 $\varphi\psi = \psi\varphi = O$. 证明:

(1) 存在 V 的一个基, 使得 φ 在该基下的矩阵是 $\begin{pmatrix} O & \\ & A_1 \end{pmatrix}$, 其中 A_1 为可逆矩阵;

(2) $\dim \text{Im}(\varphi + \psi) = \dim \text{Im} \varphi + \dim \text{Im} \psi$.

证明 (车禹赫, 陈可伊, 胡家豪, 柯智元, 李林泽, 李涛涛, 林长盛, 林天键, 刘东辰, 王良涛, 王昱祺, 吴方予, 杨嘉维, 杨宪邦, 杨沛轩, 詹筱辰, 张文豪, 郑绍楷, 周品言)

(1) (法一) 因为 φ 是 \mathbb{C} 上有限维线性空间的线性变换, 所以存在 V 的一个基 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, 使得 φ 在该基下的矩阵是

$$A = \text{diag}(J(0, a_1), \dots, J(0, a_k), J(\lambda_1, b_1), \dots, J(\lambda_l, b_l)), \lambda_i \neq 0, i = 1, 2, \dots, l$$

进而 $\dim \text{Im} \varphi = \sum_{j=1}^k (a_j - 1) + \sum_{i=1}^l b_l$.

若 $a_j > 1$, 则 $r(J(0, a_j)^2) = a_j - 2 \neq r(J(0, a_j))$, 从而

$$\dim \text{Im} \varphi^2 = \sum_{a_j > 1} (a_j - 2) + \sum_{i=1}^l b_l \neq \dim \text{Im} \varphi,$$

矛盾. 故对 $1 \leq j \leq k$, 均有 $a_j = 1$. 因此 $A = \text{diag}(O_{k \times k}, A_1)$, 其中 $A_1 = \text{diag}(J(\lambda_1, b_1), \dots, J(\lambda_l, b_l))$ 是可逆矩阵.

(法二) 因 $\dim \text{Im} \varphi^2 = \dim \text{Im} \varphi$, $\dim \text{Im} \varphi^2 + \dim \text{Ker} \varphi^2 = n = \dim \text{Im} \varphi + \dim \text{Ker} \varphi$, 则得 $\dim \text{Ker} \varphi^2 = \dim \text{Ker} \varphi$. 又因 $\text{Ker} \varphi \subseteq \text{Ker} \varphi^2$, 所以 $\text{Ker} \varphi = \text{Ker} \varphi^2$.

设 $\alpha \in \text{Im} \varphi \cap \text{Ker} \varphi$, 则存在 β 使得 $\alpha = \varphi(\beta)$, 且 $\varphi(\alpha) = 0$. 所以 $\varphi^2(\beta) = \varphi(\alpha) = 0$, 即 $\beta \in \text{Ker} \varphi^2 = \text{Ker} \varphi$, 故 $\alpha = \varphi(\beta) = 0$. 因此 $\text{Im} \varphi \cap \text{Ker} \varphi = 0$. 结合 $\dim \text{Im} \varphi + \dim \text{Ker} \varphi = n$, 所以 $V = \text{Im} \varphi \oplus \text{Ker} \varphi$.

进而可设 ξ_1, \dots, ξ_s 是 $\text{Ker} \varphi$ 的一个基, ξ_{s+1}, \dots, ξ_n 是 $\text{Im} \varphi$ 的一个基, 由于 $\text{Ker} \varphi$ 和 $\text{Im} \varphi$ 都是 φ -子空间, 所以 φ 在该基下矩阵为 $\text{diag}(O, A_1)$, 其中 O 为 s 阶方阵, A_1 为可逆矩阵.

(2) 由已知可设 ψ 在基 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 下矩阵是 $B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$. 因为 $\varphi\psi = \psi\varphi = O$, 且 A_1 可逆,

因此 $B_{12} = O, B_{21} = O, B_{22} = O$, 故 $B = \begin{pmatrix} B_{11} & O \\ O & O \end{pmatrix}$, 从而 $A + B = \begin{pmatrix} B_{11} & O \\ O & A_1 \end{pmatrix}$, $\dim \operatorname{Im}(\varphi + \psi) = r(A + B) = r(B_{11}) + r(A_1) = \dim \operatorname{Im} \psi + \dim \operatorname{Im} \varphi$.

常见错误 因为 $\dim \operatorname{Im} \varphi^2 = \dim \operatorname{Im} \varphi$, 所以 $\varphi^2 = \varphi$.

八、(6分) 证明: 存在12阶实方阵 A , 使得

$$A^{11} + A^{10} + \cdots + E = \begin{pmatrix} 2024 & & & \\ 2023 & 2024 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 2013 & \cdots & 2023 & 2024 \end{pmatrix}.$$

证明 (胡家豪, 林长盛, 张晋睿) 记 $f(x) = x^{11} + x^{10} + \cdots + x + 1$. 题中等式右边矩阵记为 B . 注意到 $f(1) < 2024, f(2) > 2024$, 故由连续函数性质可知, $f(x) = 2024$ 在开区间 $(1, 2)$ 必有一实根 λ_0 . 将 Jordan 块 $f(J(\lambda_0, 12))$ 代入 $f(x)$ 中, 可得

$$f(J(\lambda_0, 12)) = \begin{pmatrix} f(\lambda_0) & & & \\ f'(\lambda_0) & f(\lambda_0) & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ * & \cdots & f'(\lambda_0) & f(\lambda_0) \end{pmatrix}$$

显然它是对角元全为 $f(\lambda_0) = 2024$ 的下三角矩阵, 且次对角元全为正数 $f'(\lambda_0)$. 故 $f(J(\lambda_0, 12))$ 的特征值全为 2024, 其几何重数为 $12 - r(f(J(\lambda_0, 12)) - 2024E_{12}) = 1$, 因此 $f(J(\lambda_0, 12))$ 的 Jordan 标准形只有一个 Jordan 块 $J(2024, 12)$, 即 $f(J(\lambda_0, 12))$ 相似于 $J(2024, 12)$.

此外, B 也是下三角矩阵, 对角元全为 2024, 故特征值全为 2024, 几何重数为 $12 - r(B - 2024E_{12}) = 1$, 因此 B 的 Jordan 标准形也只有一个 Jordan 块 $J(2024, 12)$, 即 B 相似于 $J(2024, 12)$. 故存在可逆矩阵 P , 使得 $B = P^{-1}f(J(\lambda_0, 12))P = f(P^{-1}J(\lambda_0, 12)P)$. 令 $A = P^{-1}J(\lambda_0, 12)P$, 则 A 为实矩阵, 且 $f(A) = B$.

常见错误 $f(J(\lambda_0, 12)) = \begin{pmatrix} f(\lambda_0) & & & \\ f'(\lambda_0) & f(\lambda_0) & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & f'(\lambda_0) & f(\lambda_0) \end{pmatrix}.$

附加题 (10分) 设 A 为 $n(n \geq 3)$ 阶实可逆矩阵, 且 A^k 相似于 A , 对 $k = 1, 2, \dots, n! - 1, n!$ 成立. 证明: 对一切正整数 k , 皆有 A^k 相似于 A .

证明 首先证明 A 的特征值全为1.

设 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ 为 A 的所有互异特征值, 代数重数分别为 n_1, n_2, \dots, n_s , $n_1 + n_2 + \dots + n_s = n$. 因此 $s + 1 \leq n!$. A^k 的 n 个特征值为 $\lambda_1^k(n_1 \text{重}), \lambda_2^k(n_2 \text{重}), \dots, \lambda_s^k(n_s \text{重})$.

对 $k = 1, 2, \dots, n!$, 由 A^k 相似于 A 知 A^k 的特征值即为 A 的特征值. 因此对任一固定的 $i(1 \leq i \leq s)$, $\lambda_i, \lambda_i^2, \dots, \lambda_i^{s+1}$ 是 A 的 $s + 1$ 个特征值, 从而必有两个相等: $\lambda_i^p = \lambda_i^q, 1 \leq p < q \leq s + 1$. 注意到 A 可逆, 故 $\lambda_i \neq 0$, 从而存在 m_i , 使得 $\lambda_i^{m_i} = 1, 1 \leq m_i \leq s$.

取 m 为 m_1, m_2, \dots, m_s 的最小公倍数, 则 $m|n!$ 且 $m_i|m$, 那么 $\lambda_i^m = (\lambda_i^{m_i})^{\frac{m}{m_i}} = 1, i = 1, 2, \dots, s$. 进而 A^m 的 n 个特征值均为1. 又 A^m 相似于 A , 所以 A 的 n 个特征值也均为1.

其次证明对任意正整数 k , A^k 相似于 A .

设 A 的Jordan标准形是 $J = \text{diag}(J_1, J_2, \dots, J_t)$, 其中 $J_i = J(1, a_i)$ 是对角元为1的 a_i 阶 Jordan小块, $a_1 + a_2 + \dots + a_t = n$. 那么对任意正整数 k , A^k 相似于 $J^k = \text{diag}(J_1^k, J_2^k, \dots, J_t^k)$.

下面证明 J_i^k 相似于 J_i . 记 $H = J(1, a_i) - E_{a_i} = J(0, a_i)$, 于是

$$J_i^k = (E + H)^k = E + C_k^1 H + C_k^2 H^2 + \dots + H^k = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ k & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ * & \dots & k & 1 \end{pmatrix},$$

即 J_i^k 是下三角矩阵, 对角元全为1, 次对角元全为 $k(\neq 0)$, 故 J_i^k 的特征值全为1, 代数重数是 a_i , 几何重数是 $a_i - r(J_i^k - E_{a_i}) = 1$, 所以 J_i^k 的初等因子组为 $(\lambda - 1)^{a_i}$, 与 J_i 的初等因子组相同, 故 J_i^k 相似于 J_i , 进而 A^k 相似于 A .

常见错误1 因为 A^k 相似于 A , 所以 A 的特征值全为1或为 ± 1 . 满足 $A^k = A$ 的矩阵 A 所有可能的特征值为 $\lambda^k - 1$ 的所有可能复根, 共有 k 个: $e^{\frac{2j\pi}{k}i}, j = 0, 1, 2, \dots, k - 1$.

常见错误2 $J_i^k = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ k & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & k & 1 \end{pmatrix}.$