



# 厦门大学《高等代数(II)》课程试卷

数学,经济学院各,统计,邹院系 2023,2022 年级各 专业

主考教师: 杜妮,林鹭,阮诗隼,陈继勇 试卷类型: A 卷 考试日期:

2024.05.10

一、填空题: (18分. 每题3分, 共6题)

1. 设  $A = \begin{pmatrix} 6 & -10 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ , 则迹  $\text{tr}(A^{2024}) =$  \_\_\_\_\_.

2. 设  $(1, a, 0)^T, (1, 1, 1)^T, (2, 1, 0)^T$  分别是  $A$  的属于特征值  $0, 1, -1$  的特征向量, 则  $a$  满足 \_\_\_\_\_.

3. 设  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ , 将  $A^{-1}$  表示为  $A$  的多项式 \_\_\_\_\_.

4. 设3阶方阵  $A$  的特征矩阵  $\lambda E - A$  相抵于  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^2 + \lambda & (\lambda + 1)^2 \end{pmatrix}$ , 则  $\lambda E - A$  的法式是 \_\_\_\_\_,  
 $A$  的Jordan标准形是 \_\_\_\_\_.

5. 设  $A = \begin{pmatrix} F(\lambda^3 + \lambda) & \\ & C & F(\lambda^2 + 1) \end{pmatrix}$ , 其中  $C$  是右上角元为1, 其余元均为0的矩阵, 则  $A$  的Frobenius  
标准形为 \_\_\_\_\_,  $A$  在  $\mathbb{R}$  上的广义Jordan标准形为 \_\_\_\_\_.

6. 设  $\varphi$  是线性空间  $V$  的线性变换, 且在  $V$  的某个基下矩阵为  $\begin{pmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$ , 则  $\varphi$  的根子空  
间  $R(1) = \text{Ker } \_\_\_\_\_\_ = \text{Im } \_\_\_\_\_\_$ .

## 二、单选题: (18分, 每题3分, 共6题)

1. 设 $A$ 的特征多项式 $f_A(\lambda) = \lambda^3(\lambda - 1)^2$ , 则\_\_\_\_\_.

- (A)  $5 - r(A) = 3$  (B)  $5 - r(A) \leq 3$   
(C)  $5 - r(A) \geq 3$  (D)  $5 - r(A)$ 与3没有大小关系

2. 设 $\lambda_1, \lambda_2$ 是 $A$ 的两个不同特征值, 对应的特征向量分别为 $\alpha_1, \alpha_2$ , 则 $\alpha_1, A(\alpha_1 + \alpha_2)$ 线性相关的充要条件是\_\_\_\_\_.

- (A)  $\lambda_1 \neq 0$  (B)  $\lambda_2 \neq 0$  (C)  $\lambda_1 = 0$  (D)  $\lambda_2 = 0$

3. 下列2阶方阵中, \_\_\_\_\_不相似于 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ .

- (A)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  (C)  $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$  (D)  $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

4. 设 $A(\lambda), B(\lambda)$ 都是 $n$ 阶 $\lambda$ -矩阵, 下列叙述中\_\_\_\_\_是正确的.

- (A)  $\deg(A(\lambda)B(\lambda)) = \deg A(\lambda) + \deg B(\lambda)$   
(B) 若 $A(\lambda)B(\lambda) = O$ , 则 $A(\lambda) = O$ 或 $B(\lambda) = O$   
(C) 若 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 有相同的法式, 则 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 相抵  
(D) 若 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 有相同的初等因子组, 则 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 相抵

5. 若5阶方阵 $A$ 的极小多项式 $m_A(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 1)$ , 且秩 $r(A) = 3$ , 则在不计Jordan块次序下,  $A$ 可能的Jordan标准形有\_\_\_\_\_个.

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

6. 设复方阵 $A$ 有两个非1的不变因子, 则下列结论正确的有\_\_\_\_\_个.

- a.  $A$ 至少有一个特征子空间维数大于1  
c.  $A$ 的行列式因子与 $A$ 的不变因子不同  
(A) 1  
b.  $A$ 至少有一个根子空间不是循环子空间  
d.  $A$ 的特征多项式不等于 $A$ 的极小多项式  
(B) 2  
(C) 3  
(D) 4

三、(12分) 设方阵 $A$ 的行列式 $\det A = 18$ , 且 $3A + A^* = 15E$ , 其中 $A^*$ 为 $A$ 的伴随矩阵,  $E$ 为单位矩阵.

(1) 求 $A$ 的一个零化多项式;

(2) 求 $A$ 的极小多项式;

(3) 求 $A$ 的Jordan标准形.

要求写出过程.

四、(12分) 设 $A$ 是 $n$ 阶方阵,  $\alpha, \beta$ 是 $n$ 维列向量. 证明:  $A\alpha\beta^T$ 可对角化的充要条件是 $\beta^T A\alpha \neq 0$ 或者 $A\alpha\beta^T = O$ .

五、(12分) 设 $m_A(\lambda)$ 是 $n$ 阶方阵 $A$ 的极小多项式,  $g(\lambda)$ 是非常数多项式. 证明:  $g(A)$ 可逆的充要条件是 $(g(\lambda), m_A(\lambda)) = 1$ .

六、(12分) 设 $A$ 是 $n(n > 1)$ 阶复方阵, 满足 $A^n = O, A^{n-1} \neq O$ . 证明: 不存在 $n$ 阶方阵 $X$ , 使得 $X^2 = A$ .

七、(10分) 设 $\mathbb{C}$ 上 $n$ 维线性空间 $V$ 的线性变换 $\varphi, \psi$ 满足 $0 < \dim \operatorname{Im} \varphi^2 = \dim \operatorname{Im} \varphi < n$ , 且 $\varphi\psi = \psi\varphi = O$ . 证明:

(1) 存在 $V$ 的一个基, 使得 $\varphi$ 在该基下的矩阵是 $\begin{pmatrix} O & \\ & A_1 \end{pmatrix}$ , 其中 $A_1$ 为可逆矩阵;

(2)  $\dim \operatorname{Im}(\varphi + \psi) = \dim \operatorname{Im} \varphi + \dim \operatorname{Im} \psi$ .

八、(6分) 证明: 存在12阶实方阵 $A$ , 使得

$$A^{11} + A^{10} + \cdots + E = \begin{pmatrix} 2024 & & & \\ 2023 & 2024 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 2013 & \cdots & 2023 & 2024 \end{pmatrix}.$$

附加题 (10分) 设 $A$ 为 $n(n \geq 3)$ 阶实可逆矩阵, 且 $A^k$ 相似于 $A$ , 对 $k = 1, 2, \dots, n! - 1, n!$ 成立. 证明: 对一切正整数 $k$ , 皆有 $A^k$ 相似于 $A$ .