



厦门大学《高等代数 (I)》课程试卷

数学, 经济学院 各, 统计, 邹院系 2023, 2022 年级 各 专业

主考教师: 杜妮, 林鹭, 阮诗隼, 易少云 试卷类型: A 卷

考试日期: 2023.11.22

一、填空题 (18分, 每题3分, 共6题)

1. 设 $A = \alpha\beta^T$, 其中 $\alpha = (1, 2, 3)^T$, $\beta = (1, 0, 1)^T$, 则 $A^{2023} =$ $4^{2022} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
2. 设 n 阶方阵 A 满足 $A^2 + 2A - 3E = O$, 则 $(A + 2E)^{-1} =$ $\frac{1}{3}A$
3. 设 A 为 3×2 矩阵, B 为 2×3 矩阵, 且 $BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, 则 $r(AB) =$ 2
4. 列向量组 $(e, \pi, i, \sqrt{2})^T, (2, 7, 1, 8)^T, (2, 0, 2, 3)^T, (1, 9, 2, 3)^T, (1, 2, 1, 6)^T$ _____ (选填 “线性相关”, “线性无关”). 线性相关
5. 设 $\det(\alpha, \beta, \gamma) = \det(\alpha, \beta, \gamma + \delta) = 1$, 则列向量组 α, β, δ 的极大无关组是 α, β
6. 设 $n \times 4$ 矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, α_1, α_2 线性无关, $\alpha_3 = \alpha_1 - \alpha_2$, $\alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_2$, $\beta = \alpha_1 + 2\alpha_3$, 则非齐次线性方程组 $AX = \beta$ 的通解是 $(1, 0, 2, 0)^T + c_1(1, -1, -1, 0)^T + c_2(1, 1, 0, -1)^T$ 或者 $(3, -2, 0, 0)^T + c_1(1, -1, -1, 0)^T + c_2(1, 1, 0, -1)^T$, 其中 $c_1, c_2 \in F$

二、选择题 (18分, 每题3分, 共6题)

1. 设 A 是 3 阶方阵, 且 $\det A = -1$, 则 $((A^*)^*)^* =$ D
(A) A (B) $-A$ (C) A^{-1} (D) $-A^{-1}$

2. 设 A 是可逆矩阵, 将 A 的第 i 行乘2加到第 j 行成为 B , 则_____. **D**

- (A) 将 A^{-1} 的第 i 行乘 -2 加到第 j 行成为 B^{-1} (B) 将 A^{-1} 的第 i 列乘 -2 加到第 j 列成为 B^{-1}
 (C) 将 A^{-1} 的第 j 行乘 -2 加到第 i 行成为 B^{-1} (D) 将 A^{-1} 的第 j 列乘 -2 加到第 i 列成为 B^{-1}

3. 设方阵 A 经过一系列行初等变换变为 B , 则以下说法中_____是错误的. **B**

- (A) $r(A) = r(B)$ (B) $\det A = \det B$
 (C) A 的行向量组与 B 的行向量组等价 (D) A 的列向量组与 B 的列向量组线性关系相同

4. 若 A, B, C, D 均为 n 阶方阵, 且 C 可逆, $CD = DC$, 则 $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} =$ _____. **A**

- (A) $\det(AD - BC)$ (B) $\det(AD - CB)$ (C) $\det(DA - CB)$ (D) $\det(DA - BC)$

5. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ 均为非零向量, 且 α_1, α_2 线性无关, β_1 不可由 α_1, α_2 线性表出, β_2 可由 α_1, α_2 线性表出, 则对任意常数 k , _____未必线性无关. **D**

- (A) $\beta_1, k\alpha_1 + \alpha_2$ (B) $\beta_1, \alpha_1 + k\beta_1$ (C) $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1 + k\beta_2$ (D) $\alpha_1, \alpha_2, k\beta_1 + \beta_2$

6. 设 $AX = 0$ 的解都是 $BX = 0$ 的解, 则存在矩阵 K , 使得_____. **D**

- (A) $A = BK$ (B) $A = KB$ (C) $B = AK$ (D) $B = KA$

三、(12分) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2^2 & 0 & 3^2 & 0 & 4^2 \end{pmatrix}$.

(1) 求 $\det A$;

(2) 求 A 的所有代数余子式的和 $\sum_{i,j=1}^5 A_{ij}$.

解 (1) (法一) 取定第一, 三, 五行, 运用Laplace 定理得

$$\det A = (-1)^{1+3+5+1+3+5} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = (4-3)(4-2)(3-2)(4-2) = 4.$$

(法二) 直接计算

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2^2 & 0 & 3^2 & 0 & 4^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4.$$

(2) (法一) 由重要公式, 求某行代数余子式之和即为原行列式该行替换为(1,1,1,1,1)之后新行列式的值, 但注意到除第二行外进行替换后会与第二行成比例, 故为零, 因此

$$\sum_{i,j=1}^5 A_{ij} = \sum_{j=1}^5 A_{1j} + \sum_{j=1}^5 A_{2j} + \sum_{j=1}^5 A_{3j} + \sum_{j=1}^5 A_{4j} + \sum_{j=1}^5 A_{5j} = \det A = 4.$$

(法二) 因为

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2^2 & 0 & 3^2 & 0 & 4^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 4 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 12 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ & \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 5 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6 & 0 & -5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{5}{2} & -1 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & \frac{-5}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ & \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & \frac{-7}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-7}{2} & 2 & 1 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -8 & 0 & 6 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{5}{2} & -1 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & \frac{-5}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

所以 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & \frac{-7}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{-7}{2} & 2 & 1 & \frac{-1}{2} & 0 \\ -8 & 0 & 6 & 0 & -1 \\ \frac{5}{2} & -1 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 3 & 0 & \frac{-5}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. 因此由 $AA^* = (\det A)E$ 得

$$A^* = (\det A)A^{-1} = 4 \begin{pmatrix} 6 & 0 & \frac{-7}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{-7}{2} & 2 & 1 & \frac{-1}{2} & 0 \\ -8 & 0 & 6 & 0 & -1 \\ \frac{5}{2} & -1 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 3 & 0 & \frac{-5}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 0 & -14 & 0 & 2 \\ -14 & 8 & 4 & -2 & 0 \\ -32 & 0 & 24 & 0 & -4 \\ 10 & -4 & -4 & 2 & 0 \\ 12 & 0 & -10 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

进而 $\sum_{i,j=1}^5 A_{ij} = 4$.

常见错误1 未能正确运用Laplace 定理, 缺少系数 $(-1)^{1+3+5+1+3+5}$.

常见错误2 未能正确运用Vandermonde 行列式, 出现不该有的 $(4-1)(3-1)(2-1)$.

常见错误1 未能正确应用重要公式.

四、(12分) 问 a, b 取何值时, 线性方程组

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + bx_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2bx_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

无解, 有唯一解, 有无穷多解. 有解时求出其解.

解 设系数矩阵为 A , 则

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 2b & 1 \end{pmatrix}.$$

线性方程组的增广矩阵经过若干次行初等变换后化为行阶梯形

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & b & 1 & 3 \\ 1 & 2b & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & b & 1 & 3 \\ a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2b & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - ar_1, r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & b & 1 & 3 \\ 0 & 1 - ab & 1 - a & 4 - 3a \\ 0 & b & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{r_1 - r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 - ab & 1 - a & 4 - 3a \\ 0 & b & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

case1: 当 $b = 0$ 时,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1-ab & 1-a & 4-3a \\ 0 & b & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1-a & 4-3a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

此时 $r(A) = 2 < r(\bar{A}) = 3$, 线性方程组无解.

case2: 当 $b \neq 0$ 时,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1-ab & 1-a & 4-3a \\ 0 & b & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow \frac{1}{b}r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{b} \\ 0 & 1-ab & 1-a & 4-3a \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + (ab-1)r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{b} \\ 0 & 0 & 1-a & 4-2a-\frac{1}{b} \end{pmatrix}$$

case 2.1: 当 $a = 1$ 时,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{b} \\ 0 & 0 & 1-a & 4-2a-\frac{1}{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{b} \\ 0 & 0 & 0 & 2-\frac{1}{b} \end{pmatrix}$$

case 2.1.1: 当 $b = \frac{1}{2}$ 时,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{b} \\ 0 & 0 & 0 & 2-\frac{1}{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

此时 $r(A) = 2 = r(\bar{A}) < 3$, 线性方程组有无穷多解, 特解为 $\gamma = (2, 2, 0)^T$, 基础解系为 $\eta = (-1, 0, 1)^T$, 原方程组全部解为 $\gamma + c\eta = (2, 2, 0)^T + c(-1, 0, 1)^T, \forall c \in F$.

case 2.1.2: 当 $b \neq \frac{1}{2}$ 时, $r(A) = 2 < r(\bar{A}) = 3$, 线性方程组无解.

case 2.2: 当 $a \neq 1$ 时,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{b} \\ 0 & 0 & 1-a & 4-2a-\frac{1}{b} \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{1-a}r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{b} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4b-2ab-1}{b(1-a)} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1-r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1-2b}{b(1-a)} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{b} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4b-2ab-1}{b(1-a)} \end{pmatrix}$$

此时 $r(A) = r(\bar{A}) = 3$, 线性方程组有唯一解, 解为 $\left(\frac{1-2b}{b(1-a)}, \frac{1}{b}, \frac{4b-2ab-1}{b(1-a)}\right)^T$.

综上所述: 当 $b = 0$ 或 $a = 1$ 且 $b \neq \frac{1}{2}$ 时, 线性方程组无解.

当 $b = \frac{1}{2}$, $a = 1$ 时, 线性方程组有无穷多解, 全部解为 $(2, 2, 0)^T + c(-1, 0, 1)^T, c \in F$.

当 $b \neq 0$, $a \neq 1$ 时, 线性方程组有唯一解, 解为 $\left(\frac{1-2b}{b(1-a)}, \frac{1}{b}, \frac{4b-2ab-1}{b(1-a)}\right)^T$.

常见错误1 增广矩阵经过初等变换后, 分母出现 a 或 b .

常见错误2 分情况讨论错误. 如没有讨论 $a = 1, b = \frac{1}{2}$ 的情况; 讨论 b 是否为1, 而不是 b 是否为0.

五、(10分) 设 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k$ 是 n 元齐次线性方程组 $AX = 0$ 的一个基础解系, γ 是非齐次线性方程组 $AX = \beta$ 的一个特解. 证明: $\gamma, \gamma + \eta_1, \gamma + \eta_2, \dots, \gamma + \eta_k$ 是 $AX = \beta$ 解集合的一个极大无关组.

证明 (法一) (陶慧敏, 卞元哲, 徐思源, 梁妤琦, 傅钰茜 等)

由题可知 $AX = \beta$ 的通解为

$$X = \gamma + c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + \dots + c_k\eta_k, \quad c_1, c_2, \dots, c_k \in F.$$

特别地, $\gamma, \gamma + \eta_1, \gamma + \eta_2, \dots, \gamma + \eta_k$ 都是 $AX = \beta$ 的解.

于是证明这组解是 $AX = \beta$ 的解集合的极大线性无关组等价于要证明如下两点:

(a) $\gamma, \gamma + \eta_1, \gamma + \eta_2, \dots, \gamma + \eta_k$ 线性无关.

考虑 $c\gamma + c_1(\gamma + \eta_1) + c_2(\gamma + \eta_2) + \dots + c_k(\gamma + \eta_k) = 0$, 整理得

$$(c + c_1 + c_2 + \dots + c_k)\gamma + c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + \dots + c_k\eta_k = 0.$$

上式左乘 A , 并且由 $A\eta_i = 0, 1 \leq i \leq k$, 得到

$$(c + c_1 + c_2 + \dots + c_k)A\gamma = (c + c_1 + c_2 + \dots + c_k)\beta = 0.$$

又由于 $\beta \neq 0$, 所以 $(c + c_1 + c_2 + \dots + c_k) = 0$. 从而我们有

$$c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + \dots + c_k\eta_k = 0.$$

由此我们得到 $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$, 这是因为 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k$ 线性无关. 最后也可以得到 $c = 0$, 即 $\gamma, \gamma + \eta_1, \gamma + \eta_2, \dots, \gamma + \eta_k$ 线性无关得证.

(b) 任意 $AX = \beta$ 的解均可由 $\gamma, \gamma + \eta_1, \gamma + \eta_2, \dots, \gamma + \eta_k$ 线性表出.

事实上, 任意解 X 可通过如下方式写成 $\gamma, \gamma + \eta_1, \gamma + \eta_2, \dots, \gamma + \eta_k$ 的线性组合:

$$\begin{aligned} X &= \gamma + c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + \dots + c_k\eta_k, \quad c_1, c_2, \dots, c_k \in F \\ &= (1 - c_1 - c_2 - \dots - c_k)\gamma + c_1(\gamma + \eta_1) + c_2(\gamma + \eta_2) + \dots + c_k(\gamma + \eta_k). \end{aligned}$$

(法二) (程禹, 王小淇)

由题可知 $AX = \beta$ 的通解为

$$X = \gamma + c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + \dots + c_k\eta_k, \quad c_1, c_2, \dots, c_k \in F.$$

特别地, $\gamma, \gamma + \eta_1, \gamma + \eta_2, \dots, \gamma + \eta_k$ 都是 $AX = \beta$ 的解.

注意到上述的 $AX = \beta$ 的通解已经被表示成 $\gamma, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k$ 的线性组合. 于是证明题目结论等价于要证明如下两点:

(a) $\gamma, \gamma + \eta_1, \gamma + \eta_2, \dots, \gamma + \eta_k$ 与 $\gamma, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k$ 等价.

一方面, 易见 $\gamma, \gamma + \eta_1, \gamma + \eta_2, \dots, \gamma + \eta_k$ 可由 $\gamma, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k$ 线性表出.

另一方面, 对于任意的 $1 \leq i \leq k$, $\eta_i = (\gamma + \eta_i) + (-\gamma)$, 即 $\gamma, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k$ 可由 $\gamma, \gamma + \eta_1, \gamma + \eta_2, \dots, \gamma + \eta_k$ 线性表出.

(另外一种巧妙办法) 将 $(\gamma, \gamma + \eta_1, \gamma + \eta_2, \dots, \gamma + \eta_k)$ 第1列向量乘 -1 加到其他列得到 $(\gamma, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k)$, 此为消法初等变换, 即说明它们是等价的.

(b) $\gamma, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k$ 线性无关.

考虑

$$c\gamma + c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + \dots + c_k\eta_k = 0.$$

上式左乘 A , 并且由 $A\eta_i = 0, 1 \leq i \leq k$, 得到 $c = 0$. 从而我们有

$$c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + \dots + c_k\eta_k = 0.$$

由此我们得到 $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$, 这是因为 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k$ 线性无关. 综上所述我们得到 $c = c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$, 即 $\gamma, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k$ 线性无关得证.

常见错误1 没有说明 $\gamma, \gamma + \eta_1, \gamma + \eta_2, \dots, \gamma + \eta_k$ 是 $AX = \beta$ 的解.

常见错误2 没有证明 $\gamma, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k$ 线性无关.

六、(10分) (1) 证明: 任一 n 阶方阵必可经行初等变换化为对称矩阵;

(2) 任一方阵是否可经行初等变换化为反称矩阵? 若可, 请给出证明; 若不可, 请举反例.

证明 (1) 等价于证明对任意 n 阶方阵, 存在可逆矩阵 A , 使得 SA 是对称矩阵.

设 $r(A) = r$, 则存在 n 阶可逆矩阵 P, Q , 使得 $A = P \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q$. 令 $S = Q^T P^{-1}$, 则 S 可逆, 且 $SA = Q^T \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q$ 为对称矩阵.

(2) 未必任一方阵均可经行初等变换化为反称矩阵.

(例1) (昂正大, 林鹭楠, 仇垚鑫, 杨琳, 赵一卓, 郑绍楷 等)

$A = I$ 无法经可逆初等变换化为反称矩阵.

(例2) (车雨赫, 林长盛, 王昱祺 等)

因为若 A 是 n 阶反称矩阵, 则 $\det A^T = \det(-A) = (-1)^n \det A = -\det A$, 因此 $\det A = 0$. 所以任意奇数阶可逆矩阵必不可经行初等变换化为反称矩阵.

(例3) (郑雨晨)

$A = E_3$ 无法经可逆初等变换化为反称矩阵. 因为 $\det A = 1$, 但3阶反称矩阵的行列式为0.

(例4) (王泽峰, 徐思源)

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 无法经可逆初等变换化为反称矩阵. 因为 A 经行初等变换只能变为 $B = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$, 其中 a, b 至少有一个非零. 但 B 显然不是反称矩阵.

(例5) (李若凡, 柯鸿霖, 龙俊羽, 杨沛轩 等)

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. 设可逆矩阵 $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 其中 $ad - bc \neq 0$. 则 $PA = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$. 因为 $ad \neq bc$, 所以 a, c 不能同时为 0.

若 a, c 均不为 0, 显然 PA 不是反称矩阵. 若 $a = 0$, 则 $c \neq 0$, 则 $PA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$ 不是反称矩阵.

若 $c = 0$, 则 $a \neq 0$, 则 $PA = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 也不是反称矩阵.

故 A 不可经行初等变换化为反称矩阵.

(例6) (吴方予, 胡博钦 等)

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 或 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. $r(A) = 1$. 若存在可逆矩阵 P , 使得 $PA = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$, 其秩为 0 或 2, 矛盾.

(例7) (王江林)

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. $r(A) = 1$. 但 3 阶反称矩阵形如 $PA = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$, 其秩为 0 或 2, 矛盾.

常见错误 用行初等变换将 A 的第 1 行变为和第 1 列元相同的矩阵 B . 然后声称对 B 的右下角 $n-1$ 阶方阵同理可得. 这样做是无法将矩阵变为对称矩阵的. 因为当对 B 的右下角做行初等变换时, B 的第一列元发生变换, 将导致和第 1 行元不同.

七、(10分) 设 A 是 n 阶可逆矩阵, B 是 $n \times m$ 矩阵, C 是 $m \times n$ 矩阵, 证明: $E + CA^{-1}B$ 可逆的充要条件是 $A + BC$ 可逆.

证明 (法一) (郭诗瑜, 胡欣然, 刘东辰, 汪睿杰, 汪泽锋, 詹筱辰 等)

因为

$$\begin{pmatrix} E & O \\ CA^{-1} & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ -C & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ O & E + CA^{-1}B \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A & B \\ -C & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & O \\ C & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + BC & B \\ O & E \end{pmatrix},$$

等式两边同取行列式得

$$\begin{vmatrix} A & B \\ -C & E \end{vmatrix} = \det A \det(E + CA^{-1}B), \quad \begin{vmatrix} A & B \\ -C & E \end{vmatrix} = \det(A + BC).$$

则 $\det A \det(E + CA^{-1}B) = \det(A + BC)$.

注意到 A 可逆, 因此 $\det A \det(E + CA^{-1}B) \neq 0$ 的充要条件是 $\det(A + BC) \neq 0$, 故 $E + CA^{-1}B$ 可逆的充要条件是 $A + BC$ 可逆.

(法二) (陈劭妍, 郭思彤, 陆振浩, 陆晟恺, 张景尧, 宋旭冉 等)

因为

$$\begin{vmatrix} A & B \\ -C & E \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ O & E + CA^{-1}B \end{vmatrix} = \det A \det(E + CA^{-1}B),$$

又有

$$\begin{vmatrix} A & B \\ -C & E \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A + BC & B \\ O & E \end{vmatrix} = \det(A + BC).$$

因为 A 可逆, 因此 $\det A \det(E + CA^{-1}B) \neq 0$ 的充要条件是 $\det(A + BC) \neq 0$, 故 $E + CA^{-1}B$ 可逆的充要条件是 $A + BC$ 可逆.

(法三) (戴炜杰, 高御骁, 洪桢, 林长盛, 陆晟恺, 王新茹, 吴予菲 等)

因为 A 可逆, 且

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E + CA^{-1}B & O \\ O & E_n \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} E + CA^{-1}B & O \\ B & E_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} E_m & -CA^{-1} \\ B & E_n \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} E_m & O \\ B & BCA^{-1} + E_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} E_m & O \\ O & (BC + A)A^{-1} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} E_m & O \\ O & A + BC \end{pmatrix} \end{aligned}$$

因此, $r(E + CA^{-1}B) + n = m + r(A + BC)$, 故 $n - r(A + BC) = m - r(E + CA^{-1}B)$. 所以 $A + BC$ 可逆的充要条件是 $r(A + BC) = n$, 充要条件是 $0 = n - r(A + BC) = m - r(E + CA^{-1}B)$, 充要条件是 $r(E + CA^{-1}B) = m$, 充要条件是 $E + CA^{-1}B$ 可逆.

(法四) (蔡怡谦, 郭晓涵, 李崇双, 汪愈颢, 沈妍涵, 闫鹏瀚, 周文轩 等)

由降阶公式: “当 A, B 是同阶方阵时, $\det(E - AB) = \det(E - BA)$ ”, 得

$$\det(E + CA^{-1}B) = \det(E + BCA^{-1}) = \det((A + BC)A^{-1}) = \det(A + BC)\det A^{-1}.$$

因此 $E + CA^{-1}B$ 可逆的充要条件是 $\det(E + CA^{-1}B) \neq 0$, 充要条件是 $\det(A + BC) \neq 0$, 充要条件是 $A + BC$ 可逆.)

(法五) (郑若烯, 郑绍楷)

必要性 因为 $E + CA^{-1}B$ 可逆, 所以

$$E = (E + CA^{-1}B)(E + CA^{-1}B)^{-1}$$

$$B = (B + BCA^{-1}B)(E + CA^{-1}B)^{-1} = (E + BCA^{-1})B(E + CA^{-1}B)^{-1} = (A + BC)A^{-1}B(E + CA^{-1}B)^{-1}$$

$$BC = (A + BC)A^{-1}B(E + CA^{-1}B)^{-1}C$$

两边同减 $A + BC$, 得 $(A + BC)(A^{-1}B(E + CA^{-1}B)^{-1}C - E) = -A$. 注意到该式右边是可逆矩阵, 因此 $A + BC$ 可逆.

充分性 因为 $A + BC$ 可逆, 所以

$$\begin{aligned} E &= (A + BC)(A + BC)^{-1} \\ A^{-1} &= (E + A^{-1}BC)(A + BC)^{-1} \\ CA^{-1} &= (C + CA^{-1}BC)(A + BC)^{-1} = (E + CA^{-1}B)C(A + BC)^{-1} \end{aligned}$$

两边同时右乘 B , 再减去 $E + CA^{-1}B$, 得

$$\begin{aligned} -E &= (E + CA^{-1}B)(C(A + BC)^{-1}B - E) \\ E &= (E + CA^{-1}B)(E - C(A + BC)^{-1}B) \end{aligned}$$

故 $E + CA^{-1}B$ 可逆.

常见错误1 构造矩阵 $\begin{pmatrix} A & C \\ B & E \end{pmatrix}$, 或 $\begin{pmatrix} A & B \\ C & E \end{pmatrix}$. 第一个分块矩阵的同一行矩阵的行数不同, 不符合矩阵分块规则. 第二个分块矩阵某矩阵差一个符号, 导致结论不符合题设.

常见错误2 对分块矩阵做行或列初等变换时, 左右乘分块初等矩阵错误, 或矩阵的左右乘出错.

八、(10分) 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 且 $r(A) = r$, 证明:

(1) $A = BC$, 其中 B 是 $m \times r$ 矩阵, C 是 $r \times n$ 矩阵且秩 $r(B) = r(C) = r$. (这种分解称为 A 的满秩分解)

(2) 若 A 有两个满秩分解 $A = B_1C_1 = B_2C_2$, 则存在 r 阶可逆矩阵 P , 使得 $B_2 = B_1P$, $C_2 = P^{-1}C_1$.

证明 (1) (法一) (陈羽凡, 黄雪韩, 水淼, 王铭晨, 吴炎彤, 杨琳 等)

因为 A 可逆, 所以存在可逆矩阵 P, Q , 使得

$$A = P \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q = P \begin{pmatrix} E_r \\ O \end{pmatrix} (E_r \ O) Q.$$

令 $B = P \begin{pmatrix} E_r \\ O \end{pmatrix}$, $C = (E_r \ O) Q$, 则 $r(B) = r(C) = r$, 且 $A = BC$.

(法二) (汤圣龙)

记 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. 因为 $r(A) = r$, 所以可设 A 的列向量的极大无关组为 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$.

令 $B = (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r})$, 则 $r(B) = r$.

因为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 与 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 等价, 所以存在 $C_{r \times n}$ 使得 $A = BC$, 且 $r(A) = r(BC) \leq r(C) \leq r$. 因此 $r(C) = r$.

(2) 因为 $A = B_1 C_1 = B_2 C_2$, 所以 A 的列向量可由 B_1 (以及 B_2) 的列向量表出.

又因为 $r(A) = r(B_1) = r(B_2) = r$, 所以 A 的列向量组与 B_1 (以及 B_2) 的列向量组等价.

因此, B_1 与 B_2 的列向量组等价. 故存在 r 阶矩阵 P , 使得 $B_2 = B_1 P$. 又因为 $r = r(B_2) \leq r(P) \leq r$, 因此 P 是可逆矩阵. 从而 $A = B_2 C_2 = B_1 P C_2 = B_1 C_1$. 由此可得 $B_1 (P C_2 - C_1) = 0$.

(法一) (杨琳, 程禹, 杨宪邦)

由于 B_1 列满秩, $B_1 X = 0$ 只有零解. 因此 $P C_2 - C_1 = 0$. 故 $C_2 = P^{-1} C_1$.

(法二) (王良涛, 蔡文傑, 代婧涵)

因为 $r(B_1) + r(P C_2 - C_1) = r$, 所以 $r(P C_2 - C_1) = 0$. 因此 $P C_2 - C_1 = 0$. 故 $C_2 = P^{-1} C_1$.

(法三) (周品言, 杨嘉维, 王志伟)

下证: 列满秩矩阵满足左消去律, 即若 $B_{m \times r}$ 为列满秩, 且 $BX = BY$, 则 $X = Y$.

由于 B 列满秩, 故存在可逆矩阵 P, Q , 使得

$$B = P \begin{pmatrix} E_r \\ O \end{pmatrix} Q = P \begin{pmatrix} Q \\ O \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} Q & O \\ O & E_{n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_r \\ O \end{pmatrix}.$$

定义 $M = P \begin{pmatrix} Q & O \\ O & E_{n-r} \end{pmatrix}$, 则 M 为可逆矩阵.

令 $N = (E_r \ O) M^{-1}$, 则 $NB = (E_r \ O) M^{-1} M \begin{pmatrix} E_r \\ O \end{pmatrix} = E_r$. (即列满秩矩阵存在广义左逆).

故 $BX = BY$, 则 $NBX = NBY$, 可得 $X = Y$. 因此, 由 $B_1 P C_2 = B_1 C_1$ 以及 B_1 列满秩, 得到 $P C_2 = C_1$, 从而 $C_2 = P^{-1} C_1$.

(法四) (李林泽, 王昱琪, 陈可伊)

由于 B_1, B_2 列满秩, 故 $B_i Y = 0$ 只有零解 ($i = 1, 2$). 因此

$$C_1 X = 0 \iff B_1 C_1 X = 0 \iff B_2 C_2 X = 0 \iff C_2 X = 0,$$

即 $C_1 X = 0$ 与 $C_2 X = 0$ 同解.

故 C_1 与 C_2 行向量组等价. 即存在可逆矩阵 P , 使得 $C_1 = P C_2$.

由 $B_1 C_1 = B_1 P C_2 = B_2 C_2$, 得 $(B_1 P - B_2) C_2 = 0, C_2^T (B_1 P - B_2)^T = 0$.

因为 C_2^T 列满秩, 所以 $(B_1 P - B_2)^T = 0$. 故 $B_2 = B_1 P$.

常见错误1 $A = P \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q = P \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q$. 令 $B = P \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q$, 阶数不对.

常见错误2 未理解题意, 没有构造 B, C , 直接证明 $r(B) = r(C) = r$.

附加题 (10分) 设 n 阶方阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 满足 $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, i = 1, 2, \dots, n$. 试证明: A 必可逆.

证明 (法一) (李涛涛, 李林泽)

反证法: 若 A 不可逆, 则 $AX = 0$ 必存在非零解 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. 设 $|x_i| = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$. 则

$$0 = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = a_{ii}x_i + \sum_{j \neq i} a_{ij}x_j. \quad (1)$$

但是

$$\left| \sum_{j \neq i} a_{ij}x_j \right| < \sum_{j \neq i} |a_{ij}||x_j| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}||x_i| < |a_{ii}||x_i|.$$

与(1)矛盾. 因此, A 必可逆.

(法二) (杨宪邦)

由已知, $a_{11} \neq 0$. 将 A 的第一行依次乘 $-\frac{a_{k1}}{a_{11}}$ 加到第 k 行, 得到 B . 则 B 的第 k 行为:

$$(0, a_{k2} - \frac{a_{k1}}{a_{11}}a_{12}, \dots, a_{kn} - \frac{a_{k1}}{a_{11}}a_{1n}).$$

故 $\left| a_{kk} - \frac{a_{1k}}{a_{11}}a_{k1} \right| \geq |a_{kk}| - \left| \frac{a_{1k}}{a_{11}}a_{k1} \right|$, 且

$$\sum_{i \neq 1, k} \left| a_{ki} - \frac{a_{1i}}{a_{11}}a_{k1} \right| \leq \sum_{i \neq 1, k} |a_{ki}| + \sum_{i \neq 1, k} |a_{1i}| \frac{|a_{k1}|}{|a_{11}|}.$$

因为

$$\begin{aligned} & \sum_{i \neq 1, k} |a_{ki}| + \sum_{i \neq 1, k} |a_{1i}| \frac{|a_{k1}|}{|a_{11}|} + |a_{1k}| \frac{|a_{k1}|}{|a_{11}|} \\ &= \sum_{i \neq 1, k} |a_{ki}| + \sum_{i \neq 1} |a_{1i}| \frac{|a_{k1}|}{|a_{11}|} \\ &\leq \sum_{i \neq 1, k} |a_{ki}| + |a_{11}| \frac{|a_{k1}|}{|a_{11}|} \\ &= \sum_{i \neq k} |a_{ki}| \\ &< |a_{kk}|, \end{aligned}$$

所以

$$\sum_{i \neq 1, k} \left| a_{ki} - \frac{a_{1i}}{a_{11}}a_{k1} \right| < \left| a_{kk} - \frac{a_{1k}}{a_{11}}a_{k1} \right|.$$

令 $B = \begin{pmatrix} a_{11} & \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}$, 则 B_1 依然满足严格对角占优. 由归纳法可知, B 可逆, 从而 A 可逆.