



厦门大学《高等代数 (I)》课程试卷

数学, 经济学院 各, 统计, 邹院系 2023, 2022 年级 各 专业

主考教师: 杜妮, 林鹭, 阮诗隼, 易少云 试卷类型: A 卷

考试日期: 2023.11.22

一、填空题 (18分, 每题3分, 共6题)

1. 设 $A = \alpha\beta^T$, 其中 $\alpha = (1, 2, 3)^T$, $\beta = (1, 0, 1)^T$, 则 $A^{2023} =$ _____.
2. 设 n 阶方阵 A 满足 $A^2 + 2A - 3E = O$, 则 $(A + 2E)^{-1} =$ _____.
3. 设 A 为 3×2 矩阵, B 为 2×3 矩阵, 且 $BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, 则 $r(AB) =$ _____.
4. 列向量组 $(e, \pi, i, \sqrt{2})^T, (2, 7, 1, 8)^T, (2, 0, 2, 3)^T, (1, 9, 2, 3)^T, (1, 2, 1, 6)^T$ _____ (选填 “线性相关”, “线性无关”).
5. 设 $\det(\alpha, \beta, \gamma) = \det(\alpha, \beta, \gamma + \delta) = 1$, 则列向量组 α, β, δ 的极大无关组是 _____.
6. 设 $n \times 4$ 矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, α_1, α_2 线性无关, $\alpha_3 = \alpha_1 - \alpha_2$, $\alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_2$, $\beta = \alpha_1 + 2\alpha_3$, 则非齐次线性方程组 $AX = \beta$ 的通解是 _____.

二、选择题 (18分, 每题3分, 共6题)

1. 设 A 是 3 阶方阵, 且 $\det A = -1$, 则 $((A^*)^*)^* =$ _____.
(A) A (B) $-A$ (C) A^{-1} (D) $-A^{-1}$
2. 设 A 是可逆矩阵, 将 A 的第 i 行乘 2 加到第 j 行成为 B , 则 _____.
(A) 将 A^{-1} 的第 i 行乘 -2 加到第 3 行成为 B^{-1} (B) 将 A^{-1} 的第 i 列乘 -2 加到第 j 列成为 B^{-1}
(C) 将 A^{-1} 的第 j 行乘 -2 加到第 i 行成为 B^{-1} (D) 将 A^{-1} 的第 j 列乘 -2 加到第 i 列成为 B^{-1}
3. 设方阵 A 经过一系列行初等变换变为 B , 则以下说法中 _____ 是错误的.

(A) $r(A) = r(B)$

(B) $\det A = \det B$

(C) A 的行向量组与 B 的行向量组等价(D) A 的列向量组与 B 的列向量组线性关系相同

4. 若 A, B, C, D 均为 n 阶方阵, 且 C 可逆, $CD = DC$, 则 $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(A) $\det(AD - BC)$

(B) $\det(AD - CB)$

(C) $\det(DA - CB)$

(D) $\det(DA - BC)$

5. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ 均为非零向量, 且 α_1, α_2 线性无关, β_1 不可由 α_1, α_2 线性表出, β_2 可由 α_1, α_2 线性表出, 则对任意常数 k , 未必线性无关.

(A) $\beta_1, k\alpha_1 + \alpha_2$

(B) $\beta_1, \alpha_1 + k\beta_1$

(C) $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1 + k\beta_2$

(D) $\alpha_1, \alpha_2, k\beta_1 + \beta_2$

6. 设 $AX = 0$ 的解都是 $BX = 0$ 的解, 则存在矩阵 K , 使得 .

(A) $A = BK$

(B) $A = KB$

(C) $B = AK$

(D) $B = KA$

三、(12分) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2^2 & 0 & 3^2 & 0 & 4^2 \end{pmatrix}$.

(1) 求 $\det A$;

(2) 求 A 的所有代数余子式的和 $\sum_{i,j=1}^5 A_{ij}$.

四、(12分) 问 a, b 取何值时, 线性方程组

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + bx_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2bx_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

无解, 有唯一解, 有无穷多解. 有解时求出其解.

五、(10分) 设 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k$ 是 n 元齐次线性方程组 $AX = 0$ 的一个基础解系, γ 是非齐次线性方程组 $AX = \beta$ 的一个特解. 证明: $\gamma, \gamma + \eta_1, \gamma + \eta_2, \dots, \gamma + \eta_k$ 是 $AX = \beta$ 解集合的一个极大无关组.

六、(10分) (1) 证明: 任一 n 阶方阵必可经行初等变换化为对称矩阵;

(2) 任一方阵是否可经行初等变换化为反称矩阵? 若可, 请给出证明; 若不可, 请举反例.

七、(10分) 设 A 是 n 阶可逆矩阵, B 是 $n \times m$ 矩阵, C 是 $m \times n$ 矩阵, 证明: $E + CA^{-1}B$ 可逆的充要条件是 $A + BC$ 可逆.

八、(10分) 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 且 $r(A) = r$, 证明:

(1) $A = BC$, 其中 B 是 $m \times r$ 矩阵, C 是 $r \times n$ 矩阵且秩 $r(B) = r(C) = r$. (这种分解称为 A 的满秩分解)

(2) 若 A 有两个满秩分解 $A = B_1C_1 = B_2C_2$, 则存在 r 阶可逆矩阵 P , 使得 $B_2 = B_1P$, $C_2 = P^{-1}C_1$.

附加题 (10分) 设 n 阶方阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 满足 $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, i = 1, 2, \dots, n$. 试证明: A 必可逆.