



厦门大学《高等代数 (1)》课程试卷

数学、物理、统计学院各系 2022 年级各专业

主考教师：杜妮、林鹭、阮诗佳、陈继勇

试卷类型：A 卷 考试日期：22.11.21

一、填空题: (18 分, 每题 3 分)

1. 已知 A, B, C 都是行列式为 2 的 3 阶矩阵, 则 $\begin{vmatrix} O & -5A \\ B^{-1} & C \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$. 125

2. 设 α, β 均为 3 维列向量. 如果

$$\alpha\beta^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & -3 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix},$$

则 $\alpha^T\beta = \underline{\hspace{2cm}}$. 5

3. 已知 3 阶矩阵 A 可逆, 将 A 的第 2 列与第 3 列交换后得到矩阵 B , 再将矩阵 B 的第 1 列的 -2 倍加到第 3 列得到 C , 则满足 $PA^{-1} = C^{-1}$ 的矩阵 P 为 $\underline{\hspace{2cm}}$. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

4. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关, 其中 $r \geq 2$. 若 $\beta_1 = 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \dots + r\alpha_r$, $\beta_2 = \alpha_1 + 3\alpha_3 + \dots + r\alpha_r, \dots, \beta_r = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + (r-1)\alpha_{r-1}$, 则 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ $\underline{\hspace{2cm}}$ (选填“线性相关”, “线性无关”, “无法确定”). 线性无关

5. 设 $\alpha_1 = (1, 2, -1, 0)^T, \alpha_2 = (1, 1, 0, 2)^T, \alpha_3 = (2, 1, 1, a)^T$, 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的秩为 2, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$. 6

6. 设 4 阶不可逆方阵 $A = (a_{ij})_{4 \times 4} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, a_{12} 的代数余子式 $A_{12} \neq 0$, A^* 为 A 的伴随矩阵, 则 $A^*X = 0$ 的通解为 $\underline{\hspace{2cm}}$. $k_1\alpha_1 + k_3\alpha_3 + k_4\alpha_4$, 其中 $k_1, k_3, k_4 \in F$

二、选择题: (18 分, 每题 3 分)

1. 设 A 是任一 n 阶可逆方阵, 下列等式**错误**的是_____. C

(A) $A^*A = AA^*$

(B) $A^pA^q = A^qA^p$

(C) $A^TA = AA^T$

(D) $A^*A^{-1} = A^{-1}A^*$

2. 设 A, B 均为反称矩阵, 且 $AB = BA$, 则下列结论**错误**的是 _____. C

(A) $A+B$ 是反称矩阵

(B) AB 是对称矩阵

(C) A^*+B^* 是反称矩阵

(D) $2A+3B$ 是反称矩阵

3. 设 A, B 均为 n 阶矩阵, 且 $AB = A+B$, 则

(1) 若 A 可逆, 则 B 可逆

(2) 若 B 可逆, 则 $A+B$ 可逆

(3) $A-E$ 恒可逆

上述命题中, 正确的共有_____. D

(A) 0 个

(B) 1 个

(C) 2 个

(D) 3 个

4. 设 $Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & a \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$, P 为 3 阶非零阵且 $PQ = O$, 则_____. C

(A) $a=6$ 时, $r(P)=1$

(B) $a=6$ 时, $r(P)=2$

(C) $a \neq 6$ 时, $r(P)=1$

(D) $a \neq 6$ 时, $r(P)=2$

5. 设 n 维向量组 I: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ 是 II: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s (t \leq s)$ 的一个部分组. 则**不能**由_____判定 I 是 II 的一个极大无关组. D

(A) $t = r(I) = r(II)$

(B) $t = r(II)$ 且 I 与 II 等价

(C) $r(I) = r(II)$ 且 II 线性无关

(D) $r(I) = r(II)$ 且 I 与 II 等价

6. 若 $AX = 0$ 的解都是 $BX = 0$ 的解, 则_____. B

(A) A 的行向量组可以由 B 的行向量组线性表出

(B) B 的行向量组可以由 A 的行向量组线性表出

(C) A 的列向量组可以由 B 的列向量组线性表出

(D) B 的列向量组可以由 A 的列向量组线性表出

三、(10 分) 已知行列式 $\det A = \begin{vmatrix} a_1 & x & \cdots & x \\ x & a_2 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & x & \cdots & a_n \end{vmatrix}$, 其中 $x \neq a_i, i = 1, 2, \dots, n$. 求 $A_{11} + A_{12} + \cdots + A_{1n}$.

解 由重要公式可知

$$A_{11} + A_{12} + \cdots + A_{1n} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x & a_2 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & x & \cdots & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2 - x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n - x \end{vmatrix} = \prod_{i=2}^n (a_i - x).$$

四、(12 分) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & a+2 & 4 \\ 3 & 5 & 1 & a+8 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ b+3 \\ 5 \end{pmatrix}$. 问常数 a, b 取何值时, 线性方程组 $AX = \beta$

有无穷多解? 并求其解.

解 对方程组的增广矩阵进行行初等变换可得

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 & 4 & b+3 \\ 3 & 5 & 1 & a+8 & 5 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & a & 2 & b+1 \\ 0 & 2 & -2 & a+5 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a+1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & a+1 & 0 \end{array} \right).$$

由方程组有无穷多解可知 $r(A) = r(\bar{A}) < 4$. 因此 $a = -1$ 且 $b = 0$. 此时可知增广矩阵可通过行初等变换得

$$\bar{A} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

因此, $AX = \beta$ 有一个特解 $\xi = (0, 1, 0, 0)^T$, 其导出组 $AX = 0$ 有基础解系 $\eta_1 = (-2, 1, 1, 0)^T, \eta_2 = (1, -2, 0, 1)^T$. 方程组的通解为 $X = \xi + c_1\eta_1 + c_2\eta_2$, 其中 $c_1, c_2 \in F$.

五、(12 分) 已知矩阵 $P = \begin{pmatrix} A & E \\ E & E \end{pmatrix}$. 证明 P 可逆的充分必要条件是 $E - A$ 可逆, 并在 $(E - A)^{-1}$ 已知的情形下求 P^{-1} .

证明 (1) (法一) 因为

$$P = \begin{pmatrix} A & E \\ E & E \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A-E & O \\ E & E \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A-E & O \\ O & E \end{pmatrix},$$

或

$$\begin{pmatrix} E & -E \\ O & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & E \\ E & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & O \\ -E & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A-E & O \\ O & E \end{pmatrix},$$

所以 $r \begin{pmatrix} A & E \\ E & E \end{pmatrix} = r(A-E) + n$, 因此 P 可逆当且仅当 $r(P) = n$, 当且仅当 $r(A-E)$, 当且仅当 $A-E$ 可逆.

(法二) 注意到

$$\det(P) = \det \begin{pmatrix} A & E \\ E & E \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A-E & O \\ E & E \end{pmatrix} = \det(A-E) \det(E) = \det(A-E),$$

因此, $\det(P) \neq 0$ 当且仅当 $\det(A-E) \neq 0$. 即 P 可逆当且仅当 $A-E$ 可逆.

(2) (法一) 由 (1) 的法一证明过程可得

$$P = \begin{pmatrix} A & E \\ E & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & -E \\ O & E \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A-E & \\ & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & O \\ -E & E \end{pmatrix}^{-1},$$

所以

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} E & O \\ -E & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A-E & \\ & E \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} E & -E \\ O & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A-E)^{-1} & -(A-E)^{-1} \\ -(A-E)^{-1} & E + (A-E)^{-1} \end{pmatrix}.$$

(法二) 因为

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc|cc} A & E & E & O \\ E & E & O & E \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} A-E & O & E & -E \\ E & E & O & E \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} E & O & (A-E)^{-1} & -(A-E)^{-1} \\ E & E & O & E \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} E & O & (A-E)^{-1} & -(A-E)^{-1} \\ O & E & -(A-E)^{-1} & E + (A-E)^{-1} \end{array} \right), \end{aligned}$$

$$\text{所以 } P^{-1} = \begin{pmatrix} (A-E)^{-1} & -(A-E)^{-1} \\ -(A-E)^{-1} & E + (A-E)^{-1} \end{pmatrix}.$$

(法三) 设 $P^{-1} = \begin{pmatrix} B & C \\ S & T \end{pmatrix}$, 则

$$AB + S = E, \quad B + S = O, \quad AC + T = O, \quad C + T = E,$$

解得 $B = (A - E)^{-1}$, $S = C = -(A - E)^{-1}$, $T = E + (A - E)^{-1}$.

注 答案不唯一. 如 $B = -(E - A)^{-1}$, $T = (A - E)^{-1}A = A(A - E)^{-1}$ 等.

常见错误 1 $\left(\begin{array}{cc|cc} A-E & O & E & -E \\ E & E & O & E \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} A-E & O & 2E & -E \\ O & E & -E & E \end{array} \right)$. 这里只能用行变换, 不能用列变换.

常见错误 2 $P^{-1} = \begin{pmatrix} E & -E \\ O & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A-E & \\ & E \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} E & O \\ -E & E \end{pmatrix}$.

六、(12 分) 设 A, B 是两个 n 阶方阵, 证明: $r(A) + r(B) \leq n$ 当且仅当存在可逆矩阵 P 使得 $APB = O$.

证明 (胡傲文, 曾思琢, 黄秉章, 庄博诚, 吴贾茗彦, 刘俊玮, 何锦弘, 王跃衡, 叶一楠, 邢梓韬, 陈飞亦, 林韦帆, 鲁楚妍, 张少兵, 陈昱森, 徐扬皓, 窦明华, 文杰, 等)

必要性 因为 $APB = O$, 所以 $r(AP) + r(B) \leq n$. 又因为 P 可逆, 所以 $r(A) + r(B) = r(AP) + r(B) \leq n$.

充分性 对 A, B , 设 $r(A) = r$, $r(B) = s$, 由已知条件有 $r + s \leq n$, 且存在可逆矩阵 U, V, S, T , 使得

$$A = U \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} V, \quad B = S \begin{pmatrix} O & O \\ O & E_s \end{pmatrix} T.$$

令 $P = V^{-1}S^{-1}$, 则 P 是可逆矩阵, 且 $APB = O$.

常见错误 $A = U \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} V, B = S \begin{pmatrix} E_s & O \\ O & O \end{pmatrix} T$. 令 $P = V^{-1} \begin{pmatrix} O & O \\ O & E_{n-r} \end{pmatrix} S^{-1}$, 则 P 是可逆矩阵, 且 $APB = O$. P 不可逆, 不合题意.

七、(10 分) 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$ 是 m 维列向量, 证明方程组 $AX = \beta$ 有解的充分必要条件是方程组 $\begin{pmatrix} A^T \\ \beta^T \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 无解.

证明 (法一) (刘哲涵, 毋奇, 张弛, 梁浩宇, 廖聪, 王誉洁, 董昌跃, 韩雨兴, 韩韵奇, 鲁豫, 卜於锴, 沈熙烨, 王宇舟, 李昊翔, 连传瀚, 刘云凯, 罗海霞, 毛可盈, 徐凡淇, 杨宜放 等)

$$\begin{aligned}
 & \text{方程组 } \begin{pmatrix} A^T \\ \beta^T \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ 无解} \\
 \Leftrightarrow & \quad r \begin{pmatrix} A^T \\ \beta^T \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} A^T & 0 \\ \beta^T & 1 \end{pmatrix} - 1 \\
 \Leftrightarrow & \quad r \begin{pmatrix} A & \beta \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} A & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 1 \\
 \Leftrightarrow & \quad r \begin{pmatrix} A & \beta \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 1 \\
 \Leftrightarrow & \quad r \begin{pmatrix} A & \beta \end{pmatrix} = r(A) \\
 \Leftrightarrow & \quad \text{方程组 } AX = \beta \text{ 有解.}
 \end{aligned}$$

(法二) 只证必要性, 充分性如法一 (徐景天, 孔舒清) 反证法, 假设 $\begin{pmatrix} A^T \\ \beta^T \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 有解, 并设 X_1, X_2 分别是 $\begin{pmatrix} A^T \\ \beta^T \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 与 $AX = \beta$ 的解. 那么

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^T \\ \beta^T \end{pmatrix} X_1 = \begin{pmatrix} A^T X_1 \\ \beta^T X_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^T X_1 \\ (AX_2)^T X_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^T X_1 \\ X_2^T A^T X_1 \end{pmatrix}$$

此时有 $A^T X_1 = 0$, 但 $1 = X_2^T A^T X_1 = X_2^T 0 = 0$, 矛盾.

八、(8 分) 设 P_1, P_2, Q_1, Q_2 都是 n 阶方阵, 且 $P_i Q_j = Q_j P_i$, $r(P_i) = r(P_i Q_i)$, $1 \leq i, j \leq 2$. 求证:

(1) 方程组 $P_1 Q_1 X = 0$ 与 $P_1 X = 0$ 同解;

(2) 方程组 $P_1 P_2 X = 0$ 与 $P_1 P_2 Q_1 Q_2 X = 0$ 同解.

证明 (胡傲文, 李瑾慧, 陈伟舰, 万泽棋, 夏宇晗 等)

(1) 由 $P_1 Q_1 = Q_1 P_1$ 可知方程组 $P_1 X = 0$ 的解均为 $Q_1 P_1 X = P_1 Q_1 X = 0$ 的解. 又 $n - r(P_1) = n - r(P_1 Q_1)$, 因此 $P_1 Q_1 X = 0$ 的解也均为 $P_1 X = 0$ 的解. 所以 $P_1 X = 0$ 与 $P_1 Q_1 X = 0$ 同解.

(2)(法一) 注意到 $P_1 Q_1 = Q_1 P_1$ 的行向量组可由 P_1 的行向量组线性表出, 且它们的秩 $r(P_1 Q_1) = r(Q_1 P_1) = r(P_1)$. 因此 $P_1 Q_1 = Q_1 P_1$ 的行向量组与 P_1 的行向量组等价. 故存在矩阵 C_1 使得

$P_1 = C_1 Q_1 P_1$. 类似地, 存在矩阵 C_2 使得 $P_2 = P_2 Q_2 C_2 = Q_2 P_2 C_2$. 因此

$$r(P_1 P_2) = r(C_1 P_1 P_2 Q_1 Q_2 C_2) \leq r(P_1 P_2 Q_1 Q_2) \leq r(P_1 P_2).$$

这说明 $r(P_1 P_2) = r(P_1 P_2 Q_1 Q_2)$. 由 $P_i Q_j = Q_j P_i (1 \leq i, j \leq 2)$ 可知方程组 $P_1 P_2 X = 0$ 的解均为 $Q_1 Q_2 P_1 P_2 X = P_1 P_2 Q_1 Q_2 X = 0$ 的解. 又 $n - r(P_1 P_2) = n - r(P_1 P_2 Q_1 Q_2)$, 因此 $P_1 P_2 Q_1 Q_2 X = 0$ 的解也均为 $P_1 P_2 X = 0$ 的解. 所以, $P_1 P_2 Q_1 Q_2 X = 0$ 与 $P_1 P_2 X = 0$ 同解.

(法二) (胡傲文) 由 Frobenius 不等式和已知条件可知

$$\begin{aligned} r(Q_1 P_1 P_2 Q_2) &= r(Q_1 P_1 (P_2 Q_2)) \geq r(Q_1 P_1) + r(P_1 (P_2 Q_2)) - r(P_1) = r(P_1) + r(P_1 P_2 Q_2) - r(P_1) \\ &= r(P_1 P_2 Q_2) \geq r(P_1 P_2) + r(P_2 Q_2) - r(P_2) = r(P_1 P_2) + r(P_2) - r(P_2) = r(P_1 P_2). \end{aligned}$$

注意到 $r(Q_1 P_1 P_2 Q_2) \leq r(P_1 P_2)$, 进而我们有 $r(P_1 P_2) = r(Q_1 P_1 P_2 Q_2)$. 接下来, 利用法一相同的办法可以说明 $P_1 P_2 Q_1 Q_2 X = 0$ 与 $P_1 P_2 X = 0$ 同解.

注 Frobenius 不等式: 设 A, B, C 分别是 $m \times n, n \times s$ 和 $s \times t$ 的矩阵, 则

$$r(ABC) \geq r(AB) + r(BC) - r(B).$$

特别的, 当 $n = s$ 且 $B = E_n$ 时, 我们有

$$r(AC) \geq r(A) + r(C) - n.$$

常见错误 1 由 $r(P_i) = r(P_i Q_i)$ 得 Q_i 可逆.

常见错误 2 由于 $P_1 X = 0$ 与 $P_1 Q_1 X = 0$ 同解, $P_2 X = 0$ 与 $P_2 Q_2 X = 0$ 同解, 所以 $P_1 P_2 X = 0$ 与 $P_1 P_2 Q_1 Q_2 X = 0$ 同解.

附加题 (10 分) 设映射 $\varphi: \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ 满足 $\varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B)$ 对任意 n 阶方阵 A, B 均成立. 证明对任意两个秩相等的 n 阶方阵 A, B 总有 $r(\varphi(A)) = r(\varphi(B))$.

证明 (向杰) 因为 A, B 是两个秩相等的 n 阶方阵, 则存在 n 阶可逆方阵 P, Q , 使得 $A = PBQ$. 因而有

$$\varphi(A) = \varphi(PBQ) = \varphi(P)\varphi(B)\varphi(Q).$$

这说明 $r(\varphi(A)) \leq r(\varphi(B))$. 类似地,

$$r(\varphi(B)) = r(\varphi(P^{-1})\varphi(A)\varphi(Q^{-1})) \leq r(\varphi(A)).$$

因此 $r(\varphi(A)) = r(\varphi(B))$.