



厦门大学《高等代数(II)》课程试卷

数学, 统计学院各系 2021 年级各专业

主考教师: 杜妮 林鹭 阮诗仨 试卷类型: A 卷 考试日期: 22.6.13

一、填空题: (18分. 每题3分, 共6题)

1. 设映射 $(-, -) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 如下: $(X, Y) = X^T A^T A Y$, 则 $(-, -)$ 是一个内积的充分必要条件是 $\det A$ 满足 $\neq 0$.
2. 设 W 是 n 维欧氏空间 V 的 $n-1$ 维子空间, φ 是 V 的线性变换. 若有非零向量 $\alpha \in V$, 满足 $\alpha \perp W$ 且 $\varphi(\alpha) \perp W$, 则 α 是 (选填“必是”, “未必”) 是 φ 的一个特征向量. 必是
3. 设 V 是 n 维欧氏空间, φ 是 V 的对称变换, $\alpha \in V$ 且 $|\alpha| = 1$, 则 $(\varphi(\alpha), \varphi(\alpha))^2$ 与 $(\varphi^2(\alpha), \varphi^2(\alpha))$ 的大小关系是 \leq .
4. 设 A 是 5 阶实对称矩阵. 若 $r(A) = 4$, 且存在正数 a , 使得 $A^2 + aA = 0$, 则 A 在 \mathbb{C} 上的规范形是 $\begin{pmatrix} E_4 & \\ & 0 \end{pmatrix}$, 在 \mathbb{R} 上的规范形是 $\begin{pmatrix} -E_4 & \\ & 0 \end{pmatrix}$, \mathbb{R} 上的正交相似标准形是 $\begin{pmatrix} -aE_4 & \\ & 0 \end{pmatrix}$.
5. 设 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2ax_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$ 是正定二次型, 则 a 的取值范围是 $-\frac{4}{5} < a < 0$.
6. n 阶正交且对称的实矩阵全体按合同分类, 可以分成 $n+1$ 类.

二、选择题: (18分. 每题3分, 共6题)

1. 设 V 是有限维欧氏空间, 则下列关于过渡矩阵的叙述中 错误 的是 B.
(A) V 的不同基的过渡矩阵是可逆矩阵
(B) V 的不同基的过渡矩阵是正交矩阵
(C) V 的不同标准正交基的过渡矩阵是可逆矩阵
(D) V 的不同标准正交基的过渡矩阵是正交矩阵

2. 设 V_1, V_2 是 n 维欧氏空间 V 的子空间, 则下列叙述中正确的有_____个. **B**

- (1) 若 $V_1 \subseteq V_2$, 则 $V_2^\perp \subseteq V_1^\perp$ (2) 若 $V_1 \cap V_2 = 0$, 则 $V_1^\perp \cap V_2^\perp = 0$
 (3) 若 $V = V_1 \oplus V_2$, 则 $V_2 = V_1^\perp$ (4) 若 $V = V_1 \oplus V_2$, 则 $V = V_1^\perp \oplus V_2^\perp$
 (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

3. 设 φ 是 n 维欧氏空间 V 的对称变换, 且_____, 则 φ 是镜面反射. **C**

- (A) φ 保长度 (B) φ 的极小多项式是 $(\lambda + 1)(\lambda - 1)$
 (C) φ 的特征多项式是 $(\lambda + 1)(\lambda - 1)^{n-1}$ (D) φ 的属于特征值 -1 的几何重数是1

4. 已知实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$ 经正交线性替换化为标准形 $f(x_1, x_2, x_3) = 6y_1^2$, 则 $a =$ _____. **B**

- (A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 6

5. 下列实矩阵中, _____与 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 合同. **B**

- (A) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

6. 设 A 为 n 阶实对称矩阵, 则_____不是 A 为负定的充分必要条件. **B**

- (A) A 合同于 $-E_n$ (B) A 的所有顺序主子式全小于0
 (C) A 的所有特征值全小于0 (D) 对任意非零 n 维实向量 X , $X^TAX < 0$

三、(12分) 设 ξ_1, ξ_2, ξ_3 是欧氏空间 V 的一个标准正交基, $\alpha_1 = \xi_1 + \xi_2 - \xi_3$, $\alpha_2 = \xi_1 - \xi_2 - \xi_3$, $\alpha = \xi_2 + 2\xi_3$, 记 $W = \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$.

- (1) 求 W 的一个标准正交基;
 (2) 求 W^\perp 的一个标准正交基;
 (3) 求 α 在 W 的正射影及 α 到 W 的距离 (即求 β 与 $|\gamma|$, 其中 $\alpha = \beta + \gamma$, $\beta \in W$, $\gamma \in W^\perp$).

解 (法一) (1) 由题, ξ_1, ξ_2, ξ_3 是欧氏空间 V 的一个标准正交基, 考虑 $\alpha_1 = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)X_1$, $\alpha_2 = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)X_2$, 其中 $X_1 = (1, 1, -1)^T$, $X_2 = (1, -1, -1)^T$. 因为 $W = \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$, 对 X_1, X_2 进

行Schmidt正交化, 有

$$Y_1 = X_1 = (1, 1, -1)^T, Y_2 = X_2 - \frac{(X_2, Y_1)}{(Y_1, Y_1)} Y_1 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)^T.$$

再将 Y_1, Y_2 单位化, 得到

$$Z_1 = \frac{1}{|Y_1|} Y_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} (1, 1, -1)^T, Z_2 = \frac{1}{|Y_2|} Y_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} (1, -2, -1)^T.$$

所以, W 的一个标准正交基为

$$\beta_1 = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) Z_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \xi_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \xi_2 - \frac{1}{\sqrt{3}} \xi_3, \beta_2 = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) Z_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \xi_1 - \frac{2}{\sqrt{6}} \xi_2 - \frac{1}{\sqrt{6}} \xi_3.$$

(2) 因为 $V = W \oplus W^\perp$, $\dim W = 2$, 所以 $\dim W^\perp = \dim V - \dim W = 3 - 2 = 1$. 设 W^\perp 的一个标准正交基为 $\eta' = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) X$. 于是根据正交性, 有线性方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} X = 0,$$

解得其基础解系为 $X = k(1, 0, 1)^T, k \in \mathbb{R}$. 将 $Y = (1, 0, 1)^T$ 单位化, 得到 $Z = \frac{1}{|Y|} Y = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 0, 1)^T$. 所以, $\eta = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) Z = \frac{1}{\sqrt{2}} \xi_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \xi_3$ 是 W^\perp 的一个标准正交基.

(3) 由(1), β_1, β_2 是 W 的一个标准正交基. 因为 $\alpha = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)(0, 1, 2)^T$, 令 $U = (0, 1, 2)^T$, 计算投影 $\frac{(U, Z_1)}{(Z_1, Z_1)} Z_1 = -\frac{1}{3}(1, 1, -1)^T$, 所以 α 在 β_1 方向上的投影为 $\beta'_1 = -\frac{1}{3}\xi_1 - \frac{1}{3}\xi_2 + \frac{1}{3}\xi_3$; 计算投影 $\frac{(U, Z_2)}{(Z_2, Z_2)} Z_2 = -\frac{2}{3}(1, -2, -1)^T$, 所以 α 在 β_2 方向上的投影为 $\beta'_2 = -\frac{2}{3}\xi_1 + \frac{4}{3}\xi_2 + \frac{2}{3}\xi_3$. 因此, α 在 W 的正投影为 $\beta = \beta'_1 + \beta'_2 = -\xi_1 + \xi_2 + \xi_3$.

同理, 由(2), η 是 W^\perp 的一个标准正交基. 直接计算投影 $\frac{(U, Z)}{(Z, Z)} Z = (1, 0, 1)^T$, 有 α 在 η 方向上的投影为 $\gamma = \xi_1 + \xi_3$, 也是 α 在 W^\perp 的正投影. 因此, α 到 W 的距离为 $|\gamma| = \sqrt{2}$. (这里 $\alpha = \beta + \gamma$, $\beta \in W, \gamma \in W^\perp$.)

(法二) (1) 由题, 我们有 $\dim W = \dim \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle = 2$. 而 $\alpha_1 + \alpha_2 = 2\xi_1 - 2\xi_3 \in W, \alpha_1 - \alpha_2 = 2\xi_2 \in W$. 于是, $(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2) = 0$, 再将 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2$ 单位化, 得到 $\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_1 - \xi_3), \xi_2$ 为 W 的一个标准正交基.

(2) 因为 $(\xi_1 + \xi_3, \alpha_1 + \alpha_2) = 0, (\xi_1 + \xi_3, \alpha_1 - \alpha_2) = 0$, 考虑到 $V = W \oplus W^\perp, \dim W^\perp = \dim V - \dim W = 3 - 2 = 1$, 所以 $\xi_1 + \xi_3 \in W^\perp$, 直接将其单位化, 得到 $\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_1 + \xi_3)$ 为 W^\perp 的一个标准正交基.

(3) 由题, $\alpha = \xi_2 + 2\xi_3 = \xi_2 - (\xi_1 - \xi_3) + (\xi_1 + \xi_3)$, 其中 $\xi_2 - (\xi_1 - \xi_3) = \beta \in W, \xi_1 + \xi_3 = \gamma \in W^\perp$. 因此, α 在 W 的正投影为 $\beta = -\xi_1 + \xi_2 + \xi_3$, 到 W 的距离为 $|\gamma| = \sqrt{2}$.

注 第(3)小问, 在求得 α 在 W 的正投影 β 后, 因为 $\alpha = \xi_2 + 2\xi_3$ 已知, 所以也可以利用 $\gamma = \alpha - \beta$ 来求 α 在 W^\perp 的正投影 γ , 进而求得 $|\gamma|$. (或者先求 α 在 W^\perp 的正投影 γ , 再用 $\beta = \alpha - \gamma$ 来求 α 在 W 的正投影 β ; 因为 $\dim W^\perp = 1$, 这样计算会更简单.)

常见错误 将用坐标计算求得的 Z_1, Z_2 作为 W 的一个标准正交基. 需将 ξ_1, ξ_2, ξ_3 代入, 即 $\beta_1 = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)Z_1, \beta_2 = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)Z_2$ 为 W 的一个标准正交基.

四、(12分) 设实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = ax_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$ 的秩为2.

(1) 求 a ;

(2) 求 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的标准形以及所作的可逆线性替换(要求写出计算过程).

解 (1) 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = ax_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$ 对应的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{a}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{a}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

由二次型的秩为2知 $r(A) = 2$, 于是 $\det A = \frac{a}{4} = 0$, 即 $a = 0$.

(2) (法一 线性替换法) 由

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

令可逆线性替换

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} Y,$$

则 $f(x_1, x_2, x_3) = y_1^2 - \frac{1}{4}y_2^2$.

(法二 正交线性替换法)

$$\lambda E - A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \lambda & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \lambda \end{pmatrix}$$

所以 $f_A(\lambda) = \lambda(\lambda^2 - \frac{1}{2})$, 解得 A 的特征值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0$.

当 $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, 解得特征向量为 $\alpha_1 = (1, 1, \sqrt{2})^T$; 当 $\lambda = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, 解得特征向量为 $\alpha_2 = (1, 1, -\sqrt{2})^T$; 当 $\lambda = 0$ 时, 解得特征向量为 $\alpha_3 = (1, -1, 0)^T$. 将 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 单位化, 得到 $\gamma_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})^T, \gamma_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})^T, \gamma_3 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)^T$, 令 $Q = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3), X = QY$ 得 $f(x_1, x_2, x_3) = \frac{\sqrt{2}}{2}y_1^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}y_2^2$.

(法三 配方法) 令

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_3 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_1 - y_3 \end{cases}$$

则

$$f(x_1, x_2, x_3) = (y_1 + y_3)(y_1 - y_3) + y_2(y_1 - y_3) = y_1^2 - y_3^2 + y_1 y_2 - y_2 y_3 = (y_1 + \frac{1}{2}y_2)^2 - (y_3 + \frac{1}{2}y_2)^2,$$

再令

$$\begin{cases} z_1 = y_1 + \frac{1}{2}y_2 \\ z_2 = y_3 + \frac{1}{2}y_2 \\ z_3 = y_3 \end{cases}$$

则 $f(x_1, x_2, x_3) = z_1^2 - z_2^2$, 其中

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} Z = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} Z.$$

五、(12分) 设 φ 是 n 维欧氏空间 V 的正交变换, ψ 是 V 的线性变换. 证明: $\psi = \varphi^{-1}$ 的充分必要条件是任意的 $\alpha, \beta \in V$, 总成立 $(\varphi(\alpha), \beta) = (\alpha, \psi(\beta))$.

证明 以下设 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 是欧氏空间 V 的一个标准正交基.

必要性 (法一) 因为 φ 是正交变换, 所以若 $\psi = \varphi^{-1}$, 则对任意 $\alpha, \beta \in V$, $(\varphi(\alpha), \beta) = (\varphi(\alpha), \varphi(\psi(\beta))) = (\alpha, \psi(\beta))$.

(法二) (林旭清) φ 和 ψ 在该基下的矩阵分别为 A 和 B . 因为 φ 是正交变换, 所以 $AA^T = E$. 因为 $\psi = \varphi^{-1}$, 所以 $B = A^{-1} = A^T$. 对任意 $\alpha = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)X$, $\beta = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)Y$, $(\varphi(\alpha), \beta) = (AX, Y) = X^T A^T Y$, $(\alpha, \psi(\beta)) = (X, A^T Y) = X^T A^T Y$, 则 $(\varphi(\alpha), \beta) = (\alpha, \psi(\beta))$.

充分性 (法一) (崔振飞) 由已知及 φ 正交知, 对任意 $\alpha, \beta \in V$, $(\alpha, \psi(\beta)) = (\varphi(\alpha), \beta) = (\varphi(\alpha), \varphi(\varphi^{-1}(\beta))) = (\alpha, \varphi^{-1}(\beta))$, 因此 $(\alpha, (\psi - \varphi^{-1})(\beta)) = 0$. 该式对所有 α 成立, 特取 $\alpha = (\psi - \varphi^{-1})(\beta)$, 故由内积定义得 $(\psi - \varphi^{-1})(\beta) = 0$. 该式对所有 β 成立, 故 $\psi = \varphi^{-1}$.

(法二) (邓玲, 琚雨欣, 李文静, 文杰, 袁伟民等) 对任意 $\alpha, \beta \in V$, 由已知 $(\varphi(\alpha), \beta) =$

$(\alpha, \psi(\beta))$, 且 φ 正交,

$$\begin{aligned} & (\psi(\beta) - \varphi^{-1}(\beta), \psi(\beta) - \varphi^{-1}(\beta)) \\ &= (\psi(\beta), \psi(\beta)) - 2(\psi(\beta), \varphi^{-1}(\beta)) + (\varphi^{-1}(\beta), \varphi^{-1}(\beta)) \\ &= (\varphi\psi(\beta), \beta) - 2(\psi(\beta), \varphi^{-1}(\beta)) + (\varphi^{-1}(\beta), \psi(\beta)) \\ &= (\varphi\psi(\beta), \beta) - (\psi(\beta), \varphi^{-1}(\beta)) \\ &= (\varphi\psi(\beta), \beta) - (\varphi\psi(\beta), \beta) = 0, \end{aligned}$$

故由内积定义得 $\psi(\beta) - \varphi^{-1}(\beta) = 0$. 由 β 的任意性, 即得 $\psi = \varphi^{-1}$.

(法三) (李政廷, 林旭清等) φ 和 ψ 在该基下的矩阵分别为 A 和 B . 令 $\alpha = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)X$, $\beta = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)Y$. 则由同构, 已知条件等价于对任意 X, Y , $X^T A^T Y = (\varphi(\alpha), \beta) = (\alpha, \psi(\beta)) = (X, BY) = X^T B Y$. 取 $X^T = \varepsilon_i^T, Y = \varepsilon_j, i, j = 1, 2, \dots, n$, 则 $a_{ji} = b_{ij}$, 因此 $B = A^T$, 结合 φ 正交, 故 A 正交, 所以 $B = A^{-1}$. 由同构, $\psi = \varphi^{-1}$.

(法四) (陈鲁怡, 胡炜晗祺, 刘世, 梅书豪, 吴学敏, 杨锦涛等) 令 $\beta = \varphi(\alpha)$, 则由已知有 $(\varphi(\alpha), \varphi(\alpha)) = (\alpha, \psi(\varphi(\alpha)))$. 又 φ 正交, 所以 $(\alpha, \alpha) = (\alpha, \psi(\varphi(\alpha)))$. 设 V 的一个标准正交基 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, $\psi\varphi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)A$, 其中 $A = (a_{ij})_{n \times n}$. 取 $\alpha = \xi_i$, 则 $1 = (\xi_i, \xi_i) = (\varphi(\xi_i), \varphi(\xi_i)) = (\xi_i, \psi\varphi(\xi_i)) = (\xi_i, a_{1i}\xi_1 + a_{2i}\xi_2 + \dots + a_{ii}\xi_i + \dots + a_{ni}\xi_n) = (\xi_i, a_{ii}\xi_i) = a_{ii}$, 故 $a_{ii} = 1$. 再注意到对任意 $i \neq j, 0 = (\xi_i, \xi_j) = (\varphi(\xi_i), \varphi(\xi_j)) = (\xi_i, \psi\varphi(\xi_j)) = (\xi_i, a_{1j}\xi_1 + \dots + a_{ij}\xi_i + \dots + a_{nj}\xi_n) = a_{ij}$, 所以当 $i \neq j$ 时, $a_{ij} = 0$. 综上即得 $A = E$, 因此 $\psi\varphi = \text{id}_V$, 从而 $\psi = \varphi^{-1}$.

(法五) (阮俊伟, 王瑞吉, 王泽晟, 吴达隆等) 对任意 $\alpha \in V, \alpha = (\alpha, \xi_1)\xi_1 + (\alpha, \xi_2)\xi_2 + \dots + (\alpha, \xi_n)\xi_n = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)((\alpha, \xi_1), (\alpha, \xi_2), \dots, (\alpha, \xi_n))^T$. 因此 φ 和 ψ 在 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 下的矩阵 A, B 分别为

$$A = \begin{pmatrix} (\varphi(\xi_1), \xi_1) & (\varphi(\xi_2), \xi_1) & \cdots & (\varphi(\xi_n), \xi_1) \\ (\varphi(\xi_1), \xi_2) & (\varphi(\xi_2), \xi_2) & \cdots & (\varphi(\xi_n), \xi_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\varphi(\xi_1), \xi_n) & (\varphi(\xi_2), \xi_n) & \cdots & (\varphi(\xi_n), \xi_n) \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} (\psi(\xi_1), \xi_1) & (\psi(\xi_2), \xi_1) & \cdots & (\psi(\xi_n), \xi_1) \\ (\psi(\xi_1), \xi_2) & (\psi(\xi_2), \xi_2) & \cdots & (\psi(\xi_n), \xi_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\psi(\xi_1), \xi_n) & (\psi(\xi_2), \xi_n) & \cdots & (\psi(\xi_n), \xi_n) \end{pmatrix}.$$

因为 φ 正交, 所以 $A^T = A^{-1}$. 取 $\alpha = \xi_i, \beta = \xi_j$, 由已知有 $(\varphi(\xi_i), \xi_j) = (\xi_i, \psi(\xi_j)) = (\psi(\xi_j), \xi_i)$, 因此 $B = A^T = A^{-1}$, 故由同构得 $\psi = \varphi^{-1}$.

(法六) (蔡欣妍, 胡予田, 黄典燊, 蓝文骏, 罗威, 徐浩扬, 尤良, 张超, 朱羿旭等) 由已知得对任意 $i = 1, 2, \dots, n$, 任意 $\beta \in V$, 有 $(\varphi(\xi_i), \beta) = (\xi_i, \psi(\beta))$. 故对任意 $\alpha \in V$, 因

为 φ 正交, 有 $\varphi^{-1}(\alpha) = \sum_{i=1}^n (\xi_i, \varphi^{-1}(\alpha)) \xi_i = \sum_{i=1}^n (\varphi(\xi_i), \alpha) \xi_i = \sum_{i=1}^n (\xi_i, \psi(\alpha)) \xi_i = \psi(\alpha)$, 所以 $\psi = \varphi^{-1}$.

六、(10分) 设 A 是 m 阶正定矩阵, B 是 n 阶负定矩阵, $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$. 证明: $\begin{pmatrix} A & C \\ C^T & B \end{pmatrix}$ 的正负惯性指数分别是 m 和 n .

证明 (陈胡芳菲, 陈佳婧, 陈昕如, 郝雨薇, 梁一鸣, 罗钊岩, 彭苇翔, 肖浙俊, 余锐琦, 周晨昕等) 由题目可知, A 为正定矩阵, 故 A 可逆. 令

$$P = \begin{pmatrix} E_m & -A^{-1}C \\ & E_n \end{pmatrix}$$

显然 P 可逆, 则有

$$P^T \begin{pmatrix} A & C \\ C^T & B \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} A & \\ & B - C^T A^{-1} C \end{pmatrix} = D$$

所以 $\begin{pmatrix} A & C \\ C^T & B \end{pmatrix}$ 与 D 合同, 有相同的正负惯性指数.

又因为 A 为正定矩阵, 所以 $-A^{-1}$ 为负定矩阵, $-C^T A^{-1} C$ 为半负定矩阵. 又因为 B 为负定矩阵, 所以 $B - C^T A^{-1} C$ 为负定矩阵.

综上所述 $D = \begin{pmatrix} A & \\ & B - C^T A^{-1} C \end{pmatrix}$ 的正负惯性指数分别为 m 和 n . 即 $\begin{pmatrix} A & C \\ C^T & B \end{pmatrix}$ 的正负惯性指数分别为 m 和 n . 得证.

常见错误 P 取为 $P = \begin{pmatrix} E_m & -CA^{-1} \\ & E_n \end{pmatrix}$. P 应取为 $P = \begin{pmatrix} E_m & -A^{-1}C \\ & E_n \end{pmatrix}$.

七、(10分) 设 A, B 均为 n 阶正定矩阵.

(1) 证明: AB 的特征值都是正实数;

(2) 又若 C 为 n 阶正定矩阵, 且满足 $ABC = CBA$, 证明: ABC 是正定矩阵.

证明 (法一) (于雪婧, 陈佳婧, 袁伟民, 谢铭慧等) (1) 因为 A 为 n 阶正定矩阵, 所以存在可逆阵 P , 使得 $A = P^T P$. 于是, 有 $AB = P^T P B P^T (P^T)^{-1}$, 即 AB 相似于 $P B P^T$. 显然, B 与 $P B P^T$ 合同. 而 B 是 n 阶正定实对称矩阵, B 的特征值都是正实数, 那么 $P B P^T$ 的特征值都是正实数. 根据 AB 与 $P B P^T$ 相似, AB 的特征值都是正实数.

(2) 因为 A, B, C 均为 n 阶正定矩阵, 有 $A^T = A$, $B^T = B$, $C^T = C$, 所以 $(ABC)^T = C^T B^T A^T = CBA = ABC$, 即 ABC 为 n 阶实对称矩阵. 又 C 为 n 阶正定矩阵, 所以存在可逆阵 Q , 使得 $C =$

$Q^T Q$. 于是, 有 $ABC = Q^{-1}(QABQ^T)Q$, 即 ABC 相似于 $QABQ^T$. 显然, AB 与 $QABQ^T$ 合同. 由(1), AB 的特征值都是正实数, 所以 $QABQ^T$ 的特征值都是正实数. 根据 ABC 与 $QABQ^T$ 相似, ABC 的特征值都是正实数. 因此, ABC 为 n 阶正定实对称矩阵.

(法二) (梁程远, 刘剑飞等) (1) 设 λ 是 AB 的一个特征值, $X \neq 0$ 是其对应的一个特征向量. 于是, 有 $ABX = \lambda X$, 左右两边同时转置得, $X^T B^T A^T = \lambda X^T$. 因为 A 为 n 阶正定实对称矩阵, 有 $A^T = A$, 所以 $X^T B^T A = \lambda X^T$. 再左右两边同时右乘 BX 得,

$$(BX)^T ABX = \lambda X^T BX.$$

上式中, B 为 n 阶正定矩阵, 所以 $BX \neq 0$, 且对任意的 $X \neq 0$, $X^T BX > 0$. 将 BX 看成一个整体, A 是正定阵, 所以 $(BX)^T ABX > 0$. 因此, 我们有 $\lambda > 0$, 即 AB 的特征值都是正实数.

(2) 因为 A, B, C 均为 n 阶正定矩阵, 有 $A^T = A$, $B^T = B$, $C^T = C$, 所以 $(ABC)^T = C^T B^T A^T = CBA = ABC$, 即 ABC 为 n 阶实对称矩阵. 设 μ 是 ABC 的一个特征值, $Y \neq 0$ 是其对应的一个特征向量. 于是, 有 $ABCY = \mu Y$, 左右两边同时转置得, $Y^T CBA = \mu Y^T$. 再左右两边同时右乘 CY 得,

$$(CY)^T BACY = \mu Y^T CY.$$

上式中, C 为 n 阶正定矩阵, 所以 $CY \neq 0$, 且对任意的 $Y \neq 0$, $Y^T CY > 0$. 根据矩阵 A, B 的对称性和(1)的证明, BA 的特征值也都是正实数. 将 CY 看成一个整体, 由 A, B 的正定性, 所以 $(CY)^T BACY > 0$. 于是, 我们有 $\mu > 0$, 即 ABC 的特征值都是正实数. 因此, ABC 为 n 阶正定实对称矩阵.

常见错误 法一的(1)证明中 $AB = P^T PBP^{-1}P$, 所以 AB 合同于 PBP^{-1} , AB 的特征值和 PBP^{-1} 的同号. 两合同的矩阵特征值同号的前提是这两个矩阵都是实对称矩阵, 但这里的 AB 和 PBP^{-1} 未必是实对称矩阵.

八、(8分) 设 φ, ψ 是 n 维欧氏空间 V 的线性变换, 且对任意 $\alpha \in V$, 有 $(\varphi(\alpha), \varphi(\alpha)) = (\psi(\alpha), \psi(\alpha))$. 证明:

(1) 对任意 $\alpha, \beta \in V$, 有 $(\varphi(\alpha), \varphi(\beta)) = (\psi(\alpha), \psi(\beta))$;

(2) 存在正交变换 σ , 使得 $\psi = \sigma\varphi$.

证明 (1) 由题意, $(\varphi(\alpha), \varphi(\beta)) = (\psi(\alpha), \psi(\beta))$, 又有恒等式 $(\alpha, \beta) = \frac{(\alpha+\beta, \alpha+\beta) - (\alpha-\beta, \alpha-\beta)}{4}$, 则

$$\begin{aligned} (\varphi(\alpha), \varphi(\beta)) &= \frac{(\varphi(\alpha+\beta), \varphi(\alpha+\beta)) - (\varphi(\alpha-\beta), \varphi(\alpha-\beta))}{4} \\ &= \frac{(\psi(\alpha+\beta), \psi(\alpha+\beta)) - (\psi(\alpha-\beta), \psi(\alpha-\beta))}{4} \\ &= (\psi(\alpha), \psi(\beta)). \end{aligned}$$

(2) (黄典燊) 设 $W_1 = \text{Im}\varphi, W_2 = \text{Im}\psi$. 我们证明 W_1 与 W_2 同构. 为此, 定义变换 $\sigma_1: W_1 \rightarrow W_2$, $\varphi(x) \rightarrow \psi(x)$. 下面证明 σ_1 是线性变换. 结合(1)知, $\varphi(x) = \varphi(y) \Leftrightarrow \varphi(x-y) = 0 \Leftrightarrow (\varphi(x-y), \varphi(x-y)) = 0 \Leftrightarrow (\psi(x-y), \psi(x-y)) = 0 \Leftrightarrow \psi(x-y) = 0 \Leftrightarrow \psi(x) = \psi(y)$. 又有 $\sigma_1(a\varphi(x) + b\varphi(y)) = \sigma_1(\varphi(ax+by)) = \psi(ax+by) = \sigma_1(a\varphi(x) + b\varphi(y)) = \psi(ax+by) = a\psi(x) + b\psi(y) = a\sigma_1\varphi(x) + b\sigma_1\varphi(y)$. 且有 $\sigma_1(0) = 0, \text{Ker}\sigma_1 = 0$. 即 σ_1 为线性同构, 故 $\dim W_1 = \dim W_2$.

考虑 $V = W_1 \oplus W_1^\perp = W_2 \oplus W_2^\perp$, 有 $\dim W_1^\perp = \dim W_2^\perp = r$. 取 W_1^\perp 的一个标准正交基 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$; W_2^\perp 的一个标准正交基 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r$; 定义 $\sigma_2: W_1^\perp \rightarrow W_2^\perp$, $\sigma_2(\xi_i) = \eta_i, 1 \leq i \leq r$. 显然 σ 为 W_1^\perp 到 W_2^\perp 的正交变换.

再定义 $\sigma: V \rightarrow W$. 因为 $V = W_1 \oplus W_1^\perp$, 所以对任意 $\alpha \in V$, α 可表示为 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, 其中 $\alpha_1 \in W_1, \alpha_2 \in W_1^\perp$. 定义 $\sigma(\alpha) = \sigma_1(\alpha_1) + \sigma_2(\alpha_2)$. 则 $|\sigma(\alpha)|^2 = (\sigma(\alpha), \sigma(\alpha)) = (\sigma_1(\alpha_1) + \sigma_2(\alpha_2), \sigma_1(\alpha_1) + \sigma_2(\alpha_2)) = (\sigma_1(\alpha_1), \sigma_1(\alpha_1)) + (\sigma_2(\alpha_2), \sigma_2(\alpha_2)) = (\alpha_1, \alpha_1) + (\alpha_2, \alpha_2) = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2) = |\alpha|^2$, 故 σ 是 W 上的正交变换.

对任意 $\alpha \in V, \varphi(\alpha) \in W_1$, 因此 $\sigma\varphi(\alpha) = \sigma(\varphi(\alpha) + 0) = \sigma_1(\varphi(\alpha)) + \sigma_2(0) = \psi(\alpha)$, 即 $\psi = \sigma\varphi$.

常见错误 未考虑 φ 不可逆的情形.

附加题 (10分)

设 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 定义 $\mathbb{R}^{n \times n}$ 上函数为:

$$f(A) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2.$$

已知 n 阶实可逆矩阵 P 满足: 对任意 n 阶实矩阵 A , 都有 $f(PAP^{-1}) = f(A)$. 证明: 存在正实数 c , 使得 $P^T P = cE_n$, 其中 E_n 为 n 阶单位矩阵.

证明 (黄典燊) 考虑欧氏空间 $\mathbb{R}^{n \times n}$, 其内积为 $(A, B) = \text{tr}(A^T B)$, 则 $f(A) = |A|^2$. 定义 $\mathbb{R}^{n \times n}$ 上的线性映射: $\varphi(A) = PAP^{-1}$, 由题设条件知, $|\varphi(A)| = |A|$, 即保持长度不变, 因此是正交变换, 进而 φ^{-1} 也是正交变换. 于是, 对任意 A, B 都有

$$(\varphi(A), B) = (\varphi^{-1}\varphi(A), \varphi^{-1}(B)) = (A, \varphi^{-1}(B)) = (A, P^{-1}BP),$$

即 $\text{tr}((PAP^{-1})^T B) = \text{tr}(A^T P^{-1}BP)$, 所以

$$\text{tr}((PAP^{-1} - (P^{-1})^T A P^T)^T B) = 0.$$

取 $B = PAP^{-1} - (P^{-1})^T A P^T$, 则上式即 $\text{tr}(B^T B) = 0$. 所以 $B = O$, 即 $PAP^{-1} = (P^{-1})^T A P^T$. 由此可得 $(P^T P)A = A(P^T P)$. 最后, 由 A 的任意性, 可知 $P^T P = cE_n$, 其中 $c > 0$.