



厦门大学《高等代数(II)》课程试卷

数学, 统计学院各系 2020 年级各专业

主考教师: 林亚南 杜妮 林鹭 试卷类型: A 卷 考试日期: 21.6.18

一、

分数	阅卷人

(18分) 填空题: (每题3分, 共6题)

1. 设 A 为给定的 n 阶实对称方阵, 定义映射 $(-, -) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 为 $(X, Y) = X^T A Y$, 则 $(-, -)$ 是内积的充分必要条件是 A 为 _____ 矩阵. 正定
2. 设 ξ_1, ξ_2, ξ_3 是欧氏空间 V 的一个标准正交基, $V_1 = \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$, 其中 $\alpha_1 = \xi_1 + 2\xi_2 - \xi_3$, $\alpha_2 = \xi_1 + \xi_2 - 2\xi_3$, 则 _____ 是 V_1 的一个标准正交基. $\frac{1}{\sqrt{6}}\xi_1 + \frac{2}{\sqrt{6}}\xi_2 - \frac{1}{\sqrt{6}}\xi_3, \frac{1}{\sqrt{66}}\xi_1 - \frac{4}{\sqrt{66}}\xi_2 - \frac{7}{\sqrt{66}}\xi_3$
3. 设 A 为 \mathbb{R} 上的 2 阶正交矩阵. 若 A 满足 $A^3 + A^2 + A + E = 0$, 则 A 所有可能的正交相似标准形为 _____. $-E, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 或 $-E, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
4. 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ 的秩为 _____. 1
5. 若二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + 4x_2^2 + ax_3^2 + 6x_1x_2 + 2x_2x_3$ 是正定的, 则 a 的取值范围是 _____. $a > \frac{5}{2}$
6. 设 A 为 10 阶实对称矩阵, B, C 为同阶实矩阵, 满足 $AB = 0, (A + 2E)C = 0, r(B) = 3, r(C) = 7$, 则 A 的合同规范形是 _____. $\text{diag}\{-1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 0, 0\}$

二、

分数	阅卷人

(18分) 选择题: (每题3分, 共6题)

1. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ 是 n 维欧氏空间 V 的非零正交向量组, $\beta_1, \beta_2 \in V$ 且 $(\beta_i, \alpha_j) = 0, i = 1, 2, j = 1, 2, \dots, n-1$, 则 β_1, β_2 _____. A
 (A) 线性相关 (B) 线性无关
 (C) 没有关系 (D) 必有一个为零向量

2. 设 V_1, V_2 是欧氏空间 V 的子空间, 则下列命题中**错误**的是_____ . **D**

(A) $(V_1^\perp)^\perp = V_1$

(B) 若 $V_1 \subseteq V_2$, 则 $V_2^\perp \subseteq V_1^\perp$

(C) $(V_1 + V_2)^\perp = (V_1)^\perp \cap (V_2)^\perp$

(D) 若 $V = V_1 \oplus V_2$, 则 $V_2 = (V_1)^\perp$

3. 设 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 是欧氏空间 V 的一个标准正交基, α, β 在该基下的坐标分别是 $X = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T, Y = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$, 则下列命题成立的有_____个. **D**

(1) $a_i = (\alpha, \xi_i)$

(2) $(\alpha, \beta) = X^T Y$

(3) $|\alpha| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$

(4) $\alpha \perp \beta$ 的充分必要条件是 $\sum_{i=1}^n a_i b_i = 0$

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

4. 设 φ 是欧氏空间 V 的线性变换, 则 φ 是正交变换的**充分必要条件**是_____ . **A**

(A) φ 保持内积

(B) φ 特征值的模长为1

(C) φ 保持角度

(D) φ 在 V 的任意基下的矩阵是正交矩阵

5. 设 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是实二次型, 则_____. **C**

(A) f 的标准形是唯一的

(B) 化 f 为标准形的可逆线性替换是唯一的

(C) f 的规范形是唯一的

(D) 化 f 为规范形的可逆线性替换是唯一的

6. 下列矩阵中_____是正定矩阵. **D**

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & -6 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

三、

分数	阅卷人

(12分) 设实二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 5x_2^2 - 8x_2x_3 + 5x_3^2,$$

经正交线性替换 $X = QY$ 化为 $f = y_1^2 + y_2^2 + 10y_3^2$.

(1) 求 a ;

(2) 求上述正交矩阵 Q .

解 (1) 二次型的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} a & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$. 由已知得 $\text{tr}A = 12 = a + 10$, 所以 $a = 2$.

(2) 对 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $(E - A)X = 0$ 的一个基础解系是 $X_1 = (-2, 1, 0)^T$, $X_2 = (2, 0, 1)^T$, 正交化为 $Y_1 = X_1$, $Y_2 = (\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 1)^T$.

对 $\lambda_3 = 10$, $(10E - A)X = 0$ 的一个基础解系是 $X_3 = (-1, -2, 2)^T$.

单位化得 $Z_1 = (-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0)^T$, $Z_2 = (\frac{2}{\sqrt{45}}, \frac{4}{\sqrt{45}}, \frac{5}{\sqrt{45}})^T$, $Z_3 = (-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})^T$. 则 $Q = (Z_1, Z_2, Z_3)$ 为所求.

四、

分数	阅卷人

(10分) 设 V_1, V_2 都是欧氏空间 V 的子空间, 且 $\dim V_1 < \dim V_2$, 证明: V_2 中必有非零向量与 V_1 中的所有向量正交.

证明 (法一) 只要证明 $V_2 \cap V_1^\perp \neq 0$ 或 $\dim(V_2 \cap V_1^\perp) > 0$, 则命题得证. 事实上, 显然 $V_2 + V_1^\perp \subseteq V$. 因为 $\dim V_1 < \dim V_2$, 所以 $\dim V_1^\perp > \dim V_2^\perp = n - \dim V_2$. 所以 $\dim(V_2 \cap V_1^\perp) = \dim(V_2) + \dim(V_1^\perp) - \dim(V_2 + V_1^\perp) > 0$.

(法二) (20级彭赢荣) 设 $\dim V = n$, $\dim V_1 = s$, $\dim V_2 = t$, 则 $s < t$. 假设对任意非零 $\alpha \in V_2$, $(\alpha, V_1) \neq 0$, 则 $V_2 \cap V_1^\perp = 0$. 令 $U = V_1^\perp + V_2$, 则 U 为 V 的子空间. 即 $\dim U \leq \dim V = n$. 但 $V_2 \cap V_1^\perp = 0$ 推出 $V_1^\perp + V_2$ 是直和. 因此

$$\dim U = \dim V_1^\perp + \dim V_2 = n - s + t = n + (t - s) > n$$

矛盾, 所以假设不成立.

(法三) (20级王奕欢) 因为 V_1, V_2 是欧氏空间 V 的子空间, 取 V_1 的一个标准正交基 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_t$, 取 V_2 的一个标准正交基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$. 因为 $\dim V_1 < \dim V_2$, 故 $p > t$. 因要证 V_2 中必有非零向量与 V_1 中所有向量正交. 即证存在 $\alpha = k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_p \alpha_p \in V_2$, $(\alpha, \xi_i) = 0$, 其中 $i = 1, 2, \dots, t$ 且 k_1, k_2, \dots, k_p 不全为零. 因为 $(\alpha, \xi_i) = k_1(\alpha_1, \xi_i) + k_2(\alpha_2, \xi_i) + \dots + k_p(\alpha_p, \xi_i) = 0$. 有齐次线性方程组

$$\begin{cases} k_1(\alpha_1, \xi_1) + k_2(\alpha_2, \xi_1) + \dots + k_p(\alpha_p, \xi_1) = 0 \\ k_1(\alpha_1, \xi_2) + k_2(\alpha_2, \xi_2) + \dots + k_p(\alpha_p, \xi_2) = 0 \\ \dots \\ k_1(\alpha_1, \xi_t) + k_2(\alpha_2, \xi_t) + \dots + k_p(\alpha_p, \xi_t) = 0 \end{cases}$$

因为该方程组有 p 个未知数, 而只有 t 个方程 ($t < p$), 故一定存在非零解, 设该非零解为 (a_1, a_2, \dots, a_p) , 则 $\alpha = a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 + \dots + a_p \alpha_p \neq 0$ 且 $(\alpha, \xi_i) = 0, i = 1, 2, \dots, t$.

常见错误1 由 V_1 的一组正交基扩充到 V 的一组正交基, 由 $\dim V_1 < \dim V_2$ 得 V 的正交基里面有一个基底在 V_2 里面.

常见错误2 由 $\dim V_1 < \dim V_2$ 得 V_2 中存在一个元素 α 不在 V_1 里面, 然后直接得出 $\alpha \in V_1^\perp$.

五、

分数	阅卷人

(12分) 设 A, B 是 n 阶实对称矩阵且 A 正定, B 的正负惯性指数分别为 p, q . 设 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 是 AB 的特征值. 证明:

(1) $\lambda_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n$;

(2) $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 中恰有 p 个为正, q 个为负.

证明 (1) 因为 A 正定, 所以存在可逆矩阵 C , 使得 $A = CC^T$. 从而 $AB = C(C^TBC)C^{-1}$, 因此 AB 的特征值和 C^TBC 的特征值相同, 后者合同于实对称矩阵 B , 所以 AB 的特征值全为实数.

(2) 由(1)即得 AB 的正负特征值个数与 B 的正负惯性指数相同.

六、

分数	阅卷人

(10分) 设 φ, ψ 是 n 维欧氏空间 V 的对称变换, 满足 $\varphi\psi = \psi\varphi$, 证明存在 V 的一个标准正交基, 使得 φ, ψ 在该基下的矩阵均为对角矩阵.

证明 (法一) (20级高楚辉, 李威颖, 雷浩东, 刘金壕, 刘思怡, 刘琰, 刘梓涵, 丘中兴, 宋云起, 王骋宇, 王怡凡, 王培泽, 袁俊熙, 钟俊成, 朱书慧等) 设 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 是 V 的一个标准正交基, φ, ψ 在该基下的矩阵分别是实对称矩阵 A 和 B . 由同构知, $AB = BA$, 若能证明存在正交矩阵 Q , 使得 $Q^{-1}AQ, Q^{-1}BQ$ 同时为对角矩阵. 那么只要令 $(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)Q$, 则 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ 是 V 的标准正交基, 且 φ, ψ 在该基下的矩阵是对角矩阵.

事实上, 因为 A 为 n 阶实对称矩阵, 则存在正交矩阵 Q_1 , 使得

$$Q_1^T A Q_1 = \text{diag}(\lambda_1 E_{r_1}, \lambda_2 E_{r_2}, \dots, \lambda_t E_{r_t}),$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t$ 为 A 的所有互异特征值. 由已知 $AB = BA$, 得 $Q_1^T A Q_1 Q_1^T B Q_1 = Q_1^T B Q_1 Q_1^T A Q_1$. 将 $Q_1^T B Q_1$ 做分块

$$Q_1^T B Q_1 = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1t} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{t1} & B_{t2} & \cdots & B_{tt} \end{pmatrix},$$

其中 B_{ij} 是 $r_i \times r_j$ 阶矩阵. 根据 $Q_1^T A Q_1 Q_1^T B Q_1 = Q_1^T B Q_1 Q_1^T A Q_1$, 则对任意 $i \neq j, \lambda_i B_{ij} = \lambda_j B_{ij}$, 故 $B_{ij} = 0$, 即

$$Q_1^T B Q_1 = \text{diag}(B_{11}, B_{22}, \dots, B_{tt}).$$

注意到 Q_1 是正交矩阵, B 是实对称矩阵, 因此 $Q_1^T B Q_1$ 是实对称矩阵, 进而 B_{ii} 均实为对称矩阵. 对每个 B_{ii} , 存在正交矩阵 P_i , 使得 $P_i^T B_{ii} P_i$ 是对角矩阵 D_i . 令 $Q = Q_1 \text{diag}(P_1, P_2, \dots, P_t)$, 则 $Q^T A Q = \text{diag}(\lambda_1 E_{r_1}, \lambda_2 E_{r_2}, \dots, \lambda_t E_{r_t})$, 且 $Q^T B Q = \text{diag}(D_1, D_2, \dots, D_t)$.

(法二) (20级陈培文, 陈宇, 都妍婧, 黄喆, 蓝宇杉, 李宁懿, 那瀚文, 彭赢荣, 田玉坤, 杨林木等) 因 φ, ψ 是欧氏空间的对称变换, 所以特征值全是实数. 设 λ 是 φ 的一个特征值, V_λ 是 φ 的属于特征值 λ 的特征子空间. 则对任意 $\alpha \in V_\lambda$, $\varphi(\alpha) = \lambda\alpha$. 又由已知 $\varphi\psi = \psi\varphi$ 得 $\varphi\psi(\alpha) = \psi\varphi(\alpha) = \lambda\psi(\alpha)$, 即 $\psi(\alpha) \in V_\lambda$, 故 V_λ 是 ψ -子空间. 考虑 $\psi|_{V_\lambda}$, 显然 $\psi|_{V_\lambda}$ 是 V_λ 的对称变换, 特征值全为实数, 至少有一个特征向量 $\beta \in V_\lambda$, 则此时 β 也是 φ 的特征向量. 故 φ, ψ 有公共特征向量.

对空间的维数 n 用归纳法. $n = 1$ 时, 结论显然成立. 归纳假设结论对 $n - 1$ 维欧氏空间成立. 现证对 n 维欧氏空间也成立. 因为 φ, ψ 均为对称变换且 $\varphi\psi = \psi\varphi$, 所以 φ, ψ 至少有一个公共特征向量 ξ_1 , 单位化后仍记为 ξ_1 , 将 ξ_1 扩为 V 的标准正交基 $\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$. 则

$$\varphi(\xi_2, \dots, \xi_n) = (\xi_2, \dots, \xi_n) \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}, \psi(\xi_2, \dots, \xi_n) = (\xi_2, \dots, \xi_n) \begin{pmatrix} \mu & \beta \\ 0 & B_1 \end{pmatrix},$$

因为 φ, ψ 均为对称变换, 且 $\varphi\psi = \psi\varphi$, 因此 $\begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mu & \beta \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}$ 均为实对称矩阵,

且 $\begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu & \beta \\ 0 & B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & \beta \\ 0 & B_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$, 故 $\alpha = \beta = 0, A_1, B_1$ 实对称, 且 $A_1 B_1 = B_1 A_1$. 记 $U = \langle \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n \rangle$, 则 $n - 1$ 维欧氏空间 U 为 φ, ψ 的不变子空间, 且 $\varphi|_U, \psi|_U$ 是 U 的对称变换. 满足 $\varphi|_U \psi|_U = \psi|_U \varphi|_U$. 因此由归纳假设, 存在 U 的标准正交基 $\eta_2, \eta_3, \dots, \eta_n$, 使得 $\varphi|_U, \psi|_U$ 在该基下的矩阵为对角矩阵. 设从 $\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ 到 $\eta_2, \eta_3, \dots, \eta_n$ 的过渡矩阵为 P , 令 $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \begin{pmatrix} 1 & \\ & P \end{pmatrix}$, 则 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ 为 V 的一个标准正交基, φ, ψ 在该基下的矩阵为对角矩阵.

(法三) 因 φ, ψ 是欧氏空间的对称变换, 所以特征值全是实数. 设 λ 是 φ 的一个特征值, V_λ 是 φ 的属于特征值 λ 的特征子空间. 则对任意 $\alpha \in V_\lambda$, $\varphi(\alpha) = \lambda\alpha$. 又由已知 $\varphi\psi = \psi\varphi$ 得 $\varphi\psi(\alpha) = \psi\varphi(\alpha) = \lambda\psi(\alpha)$, 即 $\psi(\alpha) \in V_\lambda$, 故 V_λ 是 ψ -子空间. 考虑 $\psi|_{V_\lambda}$, 显然 $\psi|_{V_\lambda}$ 是 V_λ 的对称变换, 特征值全为实数, 至少有一个特征向量 $\beta \in V_\lambda$, 则此时 β 也是 φ 的特征向量. 故 φ, ψ 有公共特征向量.

对空间的维数 n 用归纳法. 当 $n = 1$ 时, 结论显然成立. 归纳假设结论对 $n - 1$ 维欧氏空间成立. 现证对 n 维欧氏空间也成立. 因为 φ, ψ 均为对称变换且 $\varphi\psi = \psi\varphi$, 所以 φ, ψ 至少有一个公共特征向量 ξ_1 , 单位化后仍记为 ξ_1 , 令 $U = \langle \xi_1 \rangle$, 则 U^\perp 是 $n - 1$ 维欧氏空间, $\varphi|_{U^\perp}, \psi|_{U^\perp}$ 都是 U^\perp 的对称变换, 且满足 $\varphi|_{U^\perp} \psi|_{U^\perp} = \psi|_{U^\perp} \varphi|_{U^\perp}$. 因此由归纳假设, 存在 U^\perp 的标准正交基 $\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$, 使得 $\varphi|_{U^\perp}, \psi|_{U^\perp}$ 在该基下的矩阵为对角矩阵 $\text{diag}\{\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n\}$ 和 $\text{diag}\{\mu_2, \mu_3, \dots, \mu_n\}$, 从而 φ, ψ 在标准正交基 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 下的矩阵为 $\text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ 和 $\text{diag}\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\}$.

常见错误1 法一中设 $Q_1^T A Q_1 = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, $Q_1^T B Q_1 = (b_{ij})_{n \times n}$, 则由 $\lambda_i b_{ij} = \lambda_j b_{ij}$, 得 $b_{ij} = 0$. 该证法仅适用于 A 有 n 个不同特征值时成立, 对 A 有重特征值时不适用.

常见错误2 法二中未证明 A_1, B_1 实对称或未证明 $A_1 B_1 = B_1 A_1$.

七、

分数	阅卷人

(10分) 设 A 是 n 阶实可逆矩阵. 二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_{2n}) = X^T B X$, 其中 $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A^T & 0 \end{pmatrix}$. 证明 f 可经过可逆的线性替换化为

$$f = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2 - y_{n+1}^2 - y_{n+2}^2 - \dots - y_{2n}^2.$$

证明 问题等价于“求证 $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A^T & 0 \end{pmatrix}$ 的正负惯性指数都为 n ”

(法一) 因为 A 可逆, 所以 $\begin{pmatrix} E & \\ & A^{-1} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & A \\ A^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & \\ & A^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}$,

且 $\begin{pmatrix} E & 0 \\ -E & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & \frac{1}{2}E \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 \\ \frac{1}{2}E & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & -E \\ 0 & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix}$, 为合同变换, 所以 B 的正负惯性指数都是 n .

(法二) (20级许昊洲) 因 $\begin{pmatrix} \lambda E & -A \\ -A^T & \lambda E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & A \\ 0 & \lambda E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda E & 0 \\ -A^T & \lambda^2 E - A^T A \end{pmatrix}$, 故 $f_B(\lambda) = \det(\lambda^2 E - A^T A)$.

又因为 A 可逆, 所以 $A^T A = A^T E A$, 即 $A^T A$ 合同于单位矩阵, 因此 $A^T A$ 的特征值全大于零, 设为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. 由于存在正交相似矩阵 Q , 使得 $Q^{-1} A^T A Q = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. 这样 $f_B(\lambda) = \det(\lambda^2 E - \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)) = \prod_{i=1}^n (\lambda - \sqrt{\lambda_i})(\lambda + \sqrt{\lambda_i})$, 故 B 的正负惯性指数都是 n .

(法三) 对 B 施行分块矩阵的合同初等变换

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & A \\ A^T & 0 \\ E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & A \\ A^T & E \\ E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & A \\ A^T & 2E \\ E & (A^T)^{-1} \\ 0 & E \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}AA^T & 0 \\ A^T & 2E \\ E & (A^T)^{-1} \\ 0 & E \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}AA^T & 0 \\ 0 & 2E \\ \frac{1}{2}E & (A^T)^{-1} \\ -\frac{1}{2}A^T & E \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}A^T & 0 \\ 0 & 2E \\ \frac{1}{2}E & (A^T)^{-1} \\ -\frac{1}{2}A^T & E \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}E & 0 \\ 0 & 2E \\ \frac{1}{2}(A^T)^{-1} & (A^T)^{-1} \\ -\frac{1}{2}E & E \end{pmatrix} \end{aligned}$$

所以 B 的正负惯性指数都是 n .

八、

分数	阅卷人

(10分) 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $r(A) = r$. 证明: 存在 m 阶正交矩阵 U 和 n 阶正交矩阵 V , 使得

$$UAV = \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $\Lambda = \text{diag}\{\sqrt{\sigma_1}, \sqrt{\sigma_2}, \dots, \sqrt{\sigma_r}\}$, $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$ 为 $A^T A$ 的非零特征值.

证明 因为 $A^T A$ 为半正定矩阵, 记其特征值为 $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$, 且 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > \sigma_{r+1} = \sigma_{r+2} = \dots = \sigma_n = 0$. 因 $A^T A$ 实对称, 所以存在正交矩阵 $V = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, 使得 $V^T A^T A V = \text{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$. 令 $V_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)$, $V_2 = (\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \dots, \alpha_n)$, $\Lambda = \text{diag}\{\sqrt{\sigma_1}, \sqrt{\sigma_2}, \dots, \sqrt{\sigma_r}\}$, 则

$$V_1^T A^T A V_1 = (A V_1)^T (A V_1) = (A \alpha_1, \dots, A \alpha_r)^T (A \alpha_1, \dots, A \alpha_r) = \text{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r\}. \quad (*)$$

类似的, $V_2^T A^T A V_2 = 0$, 从而 $A V_2 = 0$.

由(*), $\Lambda^{-1} V_1^T A^T A V_1 \Lambda = E_r$. 令 $U_1 = A V_1 \Lambda^{-1}$, 则 $U_1^T A V_1 = \Lambda$ 以及 $U_1^T U_1 = E_r$, 所以 U_1 的列向量单位正交. 将他们扩为 \mathbb{R}^m 的标准正交基, 即存在 $m \times (m-r)$ 矩阵 U_2 , 使得 $U = (U_1, U_2)$ 是正交矩阵. 特别地 $U_2^T U_1 = 0$, 所以 $U_2^T A V_1 = U_2^T U_1 \Lambda = 0 \Lambda = 0$. 所以

$$U^T A V = \begin{pmatrix} U_1^T A V_1 & U_1^T A V_2 \\ U_2^T A V_1 & U_2^T A V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

命题得证.

附加题

分数	阅卷人

(10分) 设 α, β 为 n 维欧氏空间 \mathbb{R}^n 中的两个非零列向量. 证明: 若 $\alpha^T \beta > 0$, 则存在正定矩阵 A , 使得 $\beta = A \alpha$.

证明 法一 令 $A = E - \frac{\alpha \alpha^T}{\alpha^T \alpha} + \frac{\beta \beta^T}{\beta^T \beta}$, 则 $\beta = A \alpha$. 故只要证明 A 正定, 则命题得证. 事实上, A 实对称. 由 $\alpha^T \beta > 0$ 知 $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$, 且对任意 $0 \neq X \in \mathbb{R}^n$, 由Cauchy-Schwarz不等式, 有

$$X^T A X = \frac{(\alpha^T \beta)((\beta^T \beta)(X^T X) - (\beta^T X)^2) + (\beta^T \beta)(\alpha^T X)^2}{(\alpha^T \beta)(\alpha^T \beta)} \geq 0$$

法二 (1) 若 $|\alpha| = |\beta| = 1$, 则存在镜面矩阵 $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 使得 $Q \alpha = \varepsilon_1 = (1, 0, \dots, 0)^T$. 设 $\beta_1 = Q \beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$, $\alpha_1 = Q \alpha = \varepsilon_1$, 则 $b_1 = \alpha_1^T \beta_1 = \alpha^T Q^T Q \beta = \alpha^T \beta > 0$. 令 $\beta_2 = (b_2, b_3, \dots, b_n)^T$,

$P = \begin{pmatrix} b_1 & \beta_2^T \\ \beta_2 & E_{n-1} + b_1^{-1} \beta_2 \beta_2^T \end{pmatrix}$, $A = Q^T P Q$, 则 $A\alpha = Q^T P Q \alpha = Q^T P \varepsilon_1 = Q^T \beta_1 = \beta$. 又 A 与 P 合同, P 与 $\begin{pmatrix} b_1 & \\ & E_{n-1} \end{pmatrix}$ 合同, $\begin{pmatrix} b_1 & \\ & E_{n-1} \end{pmatrix}$ 正定, 故 A 正定, 即为所求.

(2) 对于一般的 α, β , 由(1)知存在正定矩阵 A_1 , 使得 $\frac{\beta}{|\beta|} = A_1 \frac{\alpha}{|\alpha|}$, $\beta = \frac{|\beta|}{|\alpha|} A_1 \alpha$, 故令 $A = \frac{|\beta|}{|\alpha|} A_1$ 即可.