



# 厦门大学《高等代数(II)》课程试卷

数学, 统计学院各系 2020 年级各专业

主考教师: 林亚南 杜妮 林鹭 试卷类型: A 卷 考试日期: 21.6.18

一、

分数	阅卷人

(18分) 填空题: (每题3分, 共6题)

1. 设  $A$  为给定的  $n$  阶实对称方阵, 定义映射  $(-, -): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  为  $(X, Y) = X^T A Y$ , 则  $(-, -)$

是内积的充分必要条件是  $A$  为\_\_\_\_\_矩阵.

2. 设  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  是欧氏空间  $V$  的一个标准正交基,  $V_1 = \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$ , 其中  $\alpha_1 = \xi_1 + 2\xi_2 - \xi_3$ ,

$\alpha_2 = \xi_1 + \xi_2 - 2\xi_3$ , 则\_\_\_\_\_

是  $V_1$  的一个标准正交基.

3. 设  $A$  为  $\mathbb{R}$  上的 2 阶正交矩阵. 若  $A$  满足  $A^3 + A^2 + A + E = 0$ , 则  $A$  所有可能的正交相似标

准形为\_\_\_\_\_.

4. 二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$  的秩为\_\_\_\_\_.

5. 若二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + 4x_2^2 + ax_3^2 + 6x_1x_2 + 2x_2x_3$  是正定的, 则  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

6. 设  $A$  为 10 阶实对称矩阵,  $B, C$  为同阶实矩阵, 满足  $AB = 0$ ,  $(A + 2E)C = 0$ ,  $r(B) = 3$ ,

$r(C) = 7$ , 则  $A$  的合同规范形是\_\_\_\_\_.

二、

分数	阅卷人

(18分) 选择题: (每题3分, 共6题)

1. 设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$  是  $n$  维欧氏空间  $V$  的非零正交向量组,  $\beta_1, \beta_2 \in V$  且  $(\beta_i, \alpha_j) = 0$ ,  $i = 1, 2, j = 1, 2, \dots, n-1$ , 则  $\beta_1, \beta_2$  \_\_\_\_\_.

- (A) 线性相关  
(C) 没有关系

- (B) 线性无关  
(D) 必有一个为零向量

2. 设  $V_1, V_2$  是欧氏空间  $V$  的子空间, 则下列命题中**错误**的是\_\_\_\_\_.

(A)  $(V_1^\perp)^\perp = V_1$

(B) 若  $V_1 \subseteq V_2$ , 则  $V_2^\perp \subseteq V_1^\perp$

(C)  $(V_1 + V_2)^\perp = (V_1)^\perp \cap (V_2)^\perp$

(D) 若  $V = V_1 \oplus V_2$ , 则  $V_2 = (V_1)^\perp$

3. 设  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  是欧氏空间  $V$  的一个标准正交基,  $\alpha, \beta$  在该基下的坐标分别是  $X = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T, Y = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$ , 则下列命题成立的有\_\_\_\_\_个.

(1)  $a_i = (\alpha, \xi_i)$

(2)  $(\alpha, \beta) = X^T Y$

(3)  $|\alpha| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$

(4)  $\alpha \perp \beta$  的充分必要条件是  $\sum_{i=1}^n a_i b_i = 0$

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

4. 设  $\varphi$  是欧氏空间  $V$  的线性变换, 则  $\varphi$  是正交变换的**充分必要条件**是\_\_\_\_\_.

(A)  $\varphi$  保持内积

(B)  $\varphi$  特征值的模长为1

(C)  $\varphi$  保持角度

(D)  $\varphi$  在  $V$  的任意基下的矩阵是正交矩阵

5. 设  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  是实二次型, 则\_\_\_\_\_.

(A)  $f$  的标准形是唯一的

(B) 化  $f$  为标准形的可逆线性替换是唯一的

(C)  $f$  的规范形是唯一的

(D) 化  $f$  为规范形的可逆线性替换是唯一的

6. 下列矩阵中\_\_\_\_\_是正定矩阵.

(A)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & -6 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

三、

分数	阅卷人

(12分) 设实二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 5x_2^2 - 8x_2x_3 + 5x_3^2,$$

经正交线性替换 $X = QY$ 化为 $f = y_1^2 + y_2^2 + 10y_3^2$ .

(1) 求 $a$ ;

(2) 求上述正交矩阵 $Q$ .

四、

分数	阅卷人

(10分) 设 $V_1, V_2$ 都是欧氏空间 $V$ 的子空间, 且 $\dim V_1 < \dim V_2$ , 证明:  $V_2$ 中必有非零向量与 $V_1$ 中的所有向量正交.

五、

分数	阅卷人

(12分) 设 $A, B$ 是 $n$ 阶实对称矩阵且 $A$ 正定,  $B$ 的正负惯性指数分别为 $p, q$ . 设 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 是 $AB$ 的特征值. 证明:

(1)  $\lambda_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n$ ;

(2)  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 中恰有 $p$ 个为正,  $q$ 个为负.

六、

分数	阅卷人

(10分) 设 $\varphi, \psi$ 是 $n$ 维欧氏空间 $V$ 的对称变换, 满足 $\varphi\psi = \psi\varphi$ , 证明存在 $V$ 的一个标准正交基, 使得 $\varphi, \psi$ 在该基下的矩阵均为对角矩阵.

七、

分数	阅卷人

(10分) 设 $A$ 是 $n$ 阶实可逆矩阵. 二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_{2n}) = X^T B X$ , 其中 $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A^T & 0 \end{pmatrix}$ . 证明 $f$ 可经过可逆的线性替换化为

$$f = y_1^2 + y_2^2 \cdots + y_n^2 - y_{n+1}^2 - y_{n+2}^2 - \cdots - y_{2n}^2.$$

八、

分数	阅卷人

(10分) 设  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $r(A) = r$ . 证明: 存在  $m$  阶正交矩阵  $U$  和  $n$  阶正交矩阵  $V$ , 使得

$$UAV = \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中  $\Lambda = \text{diag}\{\sqrt{\sigma_1}, \sqrt{\sigma_2}, \dots, \sqrt{\sigma_r}\}$ ,  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$  为  $A^T A$  的非零特征值.

附加题

分数	阅卷人

(10分) 设 $\alpha, \beta$ 为 $n$ 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中的两个非零列向量. 证明: 若 $\alpha^T \beta > 0$ , 则存在正定矩阵 $A$ , 使得 $\beta = A\alpha$ .