《模论》若干习题参考解答

§5. 第 2 题. 在准素分解定理 (定理 14) 中,

(1) 设 q 是与 p_i, $1 \le i \le n$, 互不相伴的素元，则 $M_{q^e} = 0$, $e \in \mathbb{N}$;

(2) $\cup_{j=1}^{\infty} M_{p_i^j} = M_{p_i^{e_i}}$, $1 \le i \le n$.

证明: (1) 在准素分解定理中，设 M 的阶为 $c = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_n^{e_n}$, 其中 p_i, $1 \le i \le n$, 为 r 中互不相伴的素元. 则有

$$M = M_{p_1^{e_1}} \oplus M_{p_2^{e_2}} \oplus \cdots \oplus M_{p_n^{e_n}},$$

其中 $M_{p_i^{e_i}} := \{v \in M \mid p_i^{e_i} v = 0\ \}$ 为准素子模，阶为 $p_i^{e_i}$, $1 \le i \le n$.

设 $q \in M_{q^e} := \{u \in M \mid q^e u = 0\}$. 则 $q^e u = 0$. 因 q 是与 p_i, $1 \le i \le n$, 互不相伴的素元，所以 q 与 c 互素. 故存在 $a, b \in R$, 使得 $1 = aq + bc$. 这样 $u = (aq + bc)u = aqu + bcu = 0$. 故 $M_{q^e} = 0$.

(2) "$\supseteq$" 是显然的. 为了证明 "$\subseteq$", 设 $u \in M_{p_i^k}$, $k \in \mathbb{N}$. 因为准素分解定理，设 $u = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$, 其中 $u_j \in M_{p_j^{e_j}}$, $1 \le j \le n$. 根据 $0 = p_i^k u = p_i^k u_1 + p_i^k u_2 + \cdots + p_i^k u_n$. 因为直和的表示方法唯一，所以 $p_i^k u_j = 0$, $1 \le j \le n$. 由于 $p_j^{e_j} u_j = 0$. 当 $i \ne j$ 时，根据 $p_j^{e_j}$ 与 p_i^k 互素，与 (1) 的方法相同可得 $u_j = 0$,$i \ne j$. 所以 $u = u_i \in M_{p_i^{e_i}}$. □

§5 第 6 题. 设 M 是主理想整环 R 上的有限生成挠模. 求证： M 是单模 (即没有非平凡子模) 的充分必要条件是 $M = \langle v \rangle$, 且 $\mathrm{ann}_R(v) = \langle p \rangle$, 这里 p 为 R 的一个素元.

证明: 必要性. 设 M 是单模，根据主理想整环 R 上的有限生成挠模的分解定理， M 为一循环模 $M = \langle v \rangle$, 且 $\mathrm{ann}_R(v) = \langle p^e \rangle$, 这里 p 为 R 的一个素元， $e \ge 1$. 若 $e > 1$, 则 $\langle v \rangle$ 有真子模 $\langle pv \rangle$, 其阶为 p^{e-1}, 与 M 是单模矛盾. 所以 $e = 1$.

充分性. 设 $M = \langle v \rangle$, 且 $\mathrm{ann}_R(v) = \langle p \rangle$, 这里 p 为 R 的一个素元. 设 N 是 M 的非零子模，设 $\mathrm{ann}_R(N) = \langle c \rangle$, 则 $\langle p \rangle \subseteq \langle c \rangle$. 所以 $c|p$. 因为 N 是 M 的非零子模，所以 c 与 p 相伴. 这样 $M \cong R/\langle p \rangle \cong N$. 故 $M = N$. □

§5. 第 7 题. 设 M 是主理想整环 R 上的挠模. 求证： M 是循环模的充分必要条件是存在 R 中互不相伴的素元 $p_1, p_2, \cdots, p_m$ 及正整数 $e_1, e_2, \cdots, e_m$, 使得 $M \cong \oplus_{i=1}^{m} R/\langle p_i^{e_i} \rangle$.

证明: 首先请注意，若 $M=\langle v_1\rangle\oplus\langle v_2\rangle$, 且 $\mathrm{ann}_R(v_i)=\langle p^{e_i}\rangle$, 这里 p 为 R 的一个素元，则根据分解唯一性，知 M 不是循环模.

必要性. 设 M 是循环模, 故是有限生成模. 根据主理想整环上的有限生成挠模分解定理，$M=M_{p_1^{e_1}}\oplus M_{p_2^{e_2}}\oplus\cdots\oplus M_{p_n^{e_n}}$ 中的每个准素子模都是循环模，$M_{p_2^{e_2}}=\langle u_i\rangle$, 其阶为 $p_i^{e_i}$, $1\le i\le n$. 易知 $\langle u_i\rangle\cong R/\langle p_i^{e_i}\rangle$, $1\le i\le n$. 故 $M\cong\oplus_{i=1}^m R/\langle p_i^{e_i}\rangle$.

充分性. 设 $M\cong\oplus_{i=1}^m R/\langle p_i^{e_i}\rangle$, 其中 $p_1,p_2,\cdots,p_m$ 是 R 中互不相伴的素元，$e_1,e_2,\cdots,e_m$ 是正整数. 易知，存在 $u_i\in M$, 使得 $\langle u_i\rangle\cong R/\langle p_i^{e_i}\rangle$, $1\le i\le n$, 且 u_i 的阶是 $p_i^{e_i}$, $1\le i\le n$. 根据分解的唯一性知 $M=M_{p_1^{e_1}}\oplus M_{p_2^{e_2}}\oplus\cdots\oplus M_{p_n^{e_n}}$, 其中 $M_{p_i^{e_i}}$ 是准素子模，阶为 $p_i^{e_i}$. 由 \$4. 习题 4 的 (6) 知道， M 是循环模，生成元是 $u_1+u_2+\cdots+u_n$, 阶为 $p_1^{e_1}p_2^{e_2}\cdots p_n^{e_n}$. $\square$