习题 1 参考解答

1. 证明： (1) $\mathbb{Z}$ 是主理想整环;

(2) 设 $a_1, a_2, \cdots a_n \in \mathbb{Z}$. 则 $\langle a_1, a_2, \cdots, a_n\rangle = \langle (a_1, a_2, \cdots, a_n)\rangle$, 这里 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 是 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的最大公因数.

2. 证明 1.3 中注记 (1)-(4).

3. 设 R 是主理想整环. 对 $a, b \in R$, 如果 $\langle a\rangle + \langle b\rangle = \langle d\rangle$, 则 d 是 a, b 的最大公因子且存在 $c_1, c_2 \in R$, 使得 $d = c_1a + c_2b$.

证明: (i) 因为 $\langle a\rangle \subseteq \langle d\rangle$, 所以 $d|a$. 同理 $d|b$. 这样 d 是 a, b 的公因子;

(ii) 因为 $\langle a\rangle + \langle b\rangle = \langle d\rangle$, 所以 $d \in \langle a\rangle + \langle b\rangle$, 即存在 $c_1, c_2 \in R$, 使得 $d = c_1a + c_2b$. 设 $c|a, c|b$, 则 $c|c_1a + c_2b$, 即 $c|d$.

由 (i)(ii) 知 d 是 a, b 的最大公因子，且存在 $c_1, c_2 \in R$, 使得 $d = c_1a + c_2b$. □

4. 设 p, q 是整环 R 的不相伴的素元. 证明：

(1) $\langle pq\rangle = \langle p\rangle \cap \langle q\rangle$;

(2) $R/\langle pq\rangle \cong R/\langle p\rangle \oplus R/\langle q\rangle$.

证明: (1) 因为 $p|pq$, 所以 $\langle pq\rangle \subseteq \langle p\rangle$, 同理 $\langle pq\rangle \subseteq \langle q\rangle$, 故 $\langle pq\rangle \subseteq \langle p\rangle \cap \langle q\rangle$.

另一方面，对于任意的 $a \in \langle p\rangle \cap \langle q\rangle$, 由于 $a \in \langle p\rangle$ 可得 $p|a$. 同理 $q|a$. 又因为 p, q 是不相伴的素元，所以 $pq|a$, 即 $a \in \langle pq\rangle$. 由于 a 的任意性知 $\langle p\rangle \cap \langle q\rangle \subseteq \langle pq\rangle$.

(2) 设 $\varphi : R \to R/\langle p\rangle \oplus R/\langle q\rangle$ 是由 $a \mapsto (a + \langle p\rangle, a + \langle q\rangle)$ 所决定的映射，易证 φ 是环同态.

下面证明 φ 是满同态. 因为 p, q 是整环 R 的不相伴的素元，存在 $c, d \in R$, 使得 $cp+dq = 1$. 则 $cp+\langle q\rangle = 1+\langle q\rangle$, $dq+\langle p\rangle = 1+\langle p\rangle$. 对于 $(a+\langle p\rangle, b+\langle q\rangle) \in R/\langle p\rangle \oplus R/\langle q\rangle$, 令 $r = adq + bcp$, 则 $\varphi(r) = (r + \langle p\rangle, r + \langle q\rangle) = (adq + \langle p\rangle, bcp + \langle q\rangle) = (a + \langle p\rangle, b + \langle q\rangle)$. 所以 φ 是满同态.

现在证明 $\mathrm{Ker}\varphi = \langle pq\rangle$. 显然 $\langle pq\rangle \subseteq \mathrm{Ker}\varphi$. 设 $r \in \mathrm{Ker}\varphi$, 则 $r \in \langle p\rangle$ 且 $r \in \langle q\rangle$, 即 $r \in \langle p\rangle \cap \langle q\rangle$. 由 (1) 知 $r \in \langle pq\rangle$. 故 $\mathrm{Ker}\varphi = \langle pq\rangle$. □

5. 设 I 是环 R 的一元多项式环 $R[x]$ 的理想. 记 J_i 是 I 中所有 i 次多项式的首

项系数与 0 构成的集合．求证：

(1) J_i 是 R 的理想， $i \in \mathbb{Z}$;

(2) 存在 R 的理想链 $J_0 \subseteq J_1 \subseteq J_2 \subseteq \cdots \subseteq J_n \subseteq \cdots$.

证明: (1) 显然 J_i 是 R 的非空子集．设 $a, b \in J_i$, $r \in R$. 当 a, b 有一为 0 时，显然 $a+b \in J_i$, $ra \in J_i$. 当 a, b 都不为 0 时，存在 $ax^i + a_{i-1}x^{i-1} + \cdots + a_0 \in I$, $bx^i + b_{i-1}x^{i-1} + \cdots + b_0 \in I$, 所以 $(a+b)x_i + (a_{i-1} = B_{i-1})x^{i-1} + \cdots + (a_0 + b_0) \in I$, $rax_i + ra_{i-1}x^{i-1} + \cdots + ra_0 \in I$. 故 $a+b \in J_i$, $ra \in J_i$. 这样，对于 $i \in \mathbb{Z}$, J_i 是 R 的理想.

(2) 对于任意的 $i \in \mathbb{Z}$, 我们证明 $J_i \subseteq J_{i+1}$. 事实上，设 $a \in J_i$. 当 $a = 0$ 时，显然有 $a \in J_{i+1}$. 当 $a \neq 0$ 时，存在 $ax^i + a_{i-1}x^{i-1} + \cdots + a_0 \in I$. 因为 I 是 R 的理想，故 $ax^{i+1} + a_{i-1}x^i + \cdots + a_0 x \in I$, 这样 $a \in J_{i+1}$. □

6. 证明：设 R 是有单位元的交换环， I 是 R 的理想，则商环 R/I 是域的充分必要条件为 I 是 R 的极大理想.

证明: 必要性．设 J 是 R 的理想，满足 $I \subsetneq J$, 下面证明 $J = R$. 事实上，设 $a \in J \backslash I$, 则 $a + I \neq 0 + I \in R/I$. 由于 R/I 是域，所以 $a + I$ 有逆元，记为 $b + I$, 即 $ab + I = 1 + I$. 故 $ab - 1 \in I \subseteq J$. 由 $a \in J$ 可得 $1 \in J$. 这样 $J = R$.

充分性. 只要证明 R/I 的非零元 $a+I$ 可逆．因为 $a+I \neq 0+I$, 则 $I \subsetneq \langle I, a\rangle \subseteq R$. 由于 I 是极大理想, 所以 $\langle I, a\rangle = R$, 则 $1 \in \langle I, a\rangle$, 即存在 $r \in R, s \in I$, 使得 $1 = ra+s$, 这样在 R/I 中 $a + I$ 有逆元 $r + I$. □

7. 用 Zorn 引理证明：域 F 上线性空间 V 必存在基.

证明: V 的一个非空向量组 A(可能是有限集或无限集) 成为线性无关的, 如果 A 中的任意有限个向量都是线性无关的． V 中的所有线性无关的向量组作为元素构成的集合 S 按照集合的包含关系构成一个偏序集．设 $\{A_i | i \in I\}$ 是 S 的一个链，我们断言 $A = \cup_{i\in I} A_i$ 是线性无关集．事实上，设 $A_1 = \{\alpha_{11}, \alpha_{12}, \cdots, \alpha_{1t}\}$ 是 A 的一个有限子集, 则每个 α_{1j} 必包含在某个 A_{1j} 中．这样, 存在 $i_0 \in I$, 使得 $A_{ij} \subseteq A_{i_0}$ 中，即 $A \subseteq A_{i_0}$, 因而是线性无关的向量组．这样 A 是线性无关组， $A \in S$, 是 $\{A_i | i \in I\}$ 的上界．根据 Zorn 引理，存在极大元 B. 我们断言 B 是 V 的一个基．事实上，若存在 V 的向量 β 不能由 B 中的任意有限个向量向量线性表示，则 $B \cup \{\beta\}$ 线性无

关，与 B 的极大性矛盾． $\square$

8. 证明：任意有单位元 1 的环 R 一定有极大理想.

证明: 设 $S=\{I \mid I$ 是 R 的理想，且 $1 \notin I\}$. 因为 $0 \in S$, 所以 S 是非空集合. S 关于集合的包含关系构成一个偏序集．对于 S 中的链 $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots \subseteq I_n \subseteq$, 可证 $A=\cup_{i=1}^{\infty} I_i \in S$, 因而是链的上界．根据 Zorn 引理， S 中存在极大元 J. 则可断言 J 就是极大理想．事实上，否则，存在理想 K 使得 $J \subsetneq K \subsetneq R$, 则 $K \in S$ 与 J 的极大性矛盾． $\square$