《模论》课程考卷 (2006 年 7 月 17 日上午)

一. 选择题 (正确的，打勾；不正确的，打叉)(20 分)

1. 设 $F[x]$ 是域 F 上的多项式环，则 $F[x]$ 是主理想整环. (　　)

2. 域 F 上的线性空间无挠元. (　　)

3. 设 R 是整环， $a, b \in R$. 则 $a|b$ 的充分必要条件是 $\langle a\rangle \subseteq \langle b\rangle$.(　　)

4. 设 σ 是域 F 上 n 维线性空间 V 的一个线性变换. 则 σ 的极小多项式 $m_\sigma(x)$ 和特征多项式 $t_\sigma(x)$ 有相同的素因子. (　　)

二. 填空题 (45 分)

1. 写出主理想整环上有限生成模的分解定理的主要内容.

2. 设 σ 是 $\mathbb{C}$ 上 n 维线性空间 V 的一个线性变换. σ 的初等因子为 $(x-1)^2, (x-1), (x+i), (x-i)$.

(1) 写出 σ 的极小多项式和特征多项式;

(2) 写出 σ 的 Jordan 标准形;

(3) 在 $\mathbb{R}$ 上写出 σ 的有理标准形 (初等因子形式和不变因子形式).

三. 证明题 (任选两题)(30 分)

1. 设 M 是主理想整环 R 上的模， p, q 是 R 上互不相伴的素元，令 $M_p := \{v \in M \mid 存在 e \in \mathbb{Z}, 使得 p^e v = 0\}$. 求证:

(1) M_p 是 M 的子模;

(2) $(M_p)_q = 0$.

2. 利用 Zorn 引理证明：任意有单位元的环一定有极大理想.

3. 一个 R- 模 M 是有限生成的充分必要条件是存在 $n \in \mathbb{N}$ 和 R- 模满同态 $\varphi : R^n \to M$.

4. 设 φ 是 R- 模 M 的自同态. 证明 φ 是满同态的充分必要条件是 φ 是自同构.

四. 写出你对本课程的看法，意见和建议. (5 分)