从线性同构谈起

一. 线性空间的同构

数域 F 上的线性空间 V,W 称为同构，如果存在单的且满的线性映射 $\phi: V \leftarrow W$. 这时， ϕ 称为同构映射，记为 $\phi: V \cong W$ 或 $V \cong W$.

定理. 设 V,W 是线性空间. 则 $\phi: V \cong W \Longleftrightarrow$ 存在线性映射 $\psi: W \to V$, 使得 $\phi\psi = \varepsilon$, $\psi\phi = \varepsilon$.

定理. 设 V,W 是有限维线性空间. 则 $V \cong W \Longleftrightarrow \dim(V) = \dim(W)$.

线性空间的同构保持向量间的线性关系. 设 $\phi: V \cong W$. 若在 V 上有 $\alpha = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_s\alpha_s$, 则在 W 上有 $\phi(\alpha) = a_1\phi(\alpha_1) + a_2\phi(\alpha_2) + \cdots + a_s\phi(\alpha_s)$; 若在 W 上有 $\beta = b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + \cdots + b_s\beta_s$, 则在 V 上存在唯一的 $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 使得 $\phi(\alpha) = \beta$, $\phi(\alpha_i) = \beta_i, 1 \le i \le s$, 且有 $\alpha = b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + \cdots + b_s\alpha_s$; $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 在 V 线性相关 $\Longleftrightarrow \phi(\alpha_1), \phi(\alpha_2), \cdots, \phi(\alpha_m)$ 在 W 线性相关； $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 是 V 的一个基 $\Longleftrightarrow \phi(\alpha_1), \phi(\alpha_2), \cdots, \phi(\alpha_m)$ 是 W 的一个基.

线性空间的同构保持子空间和直和分解的关系. 设 $\phi: V \cong W$. 若 V_1, V_2 是 V 的两个子空间，则

(1). $\phi(V_1 \cap V_2) = \phi(V_1) \cap \phi(V_2)$;
(2). $V_1 \subseteq V_2 \Longleftrightarrow \phi(V_1) \subseteq \phi(V_2)$;
(3). $V = V_1 \oplus V_2 \Longleftrightarrow W = \phi(V_1) \oplus \phi(V_2)$.

设 V 是 n 维线性空间，取定 V 的一个基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$. 对于任意 $\alpha \in V$ 在此基下的坐标是 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)'$, 则 $\phi: \alpha \mapsto (a_1, a_2, \cdots, a_n)'$ 导出了 $V \cong F^n$. 这样， n 维线性空间的问题可以化为 F^n 来处理.

例 1. 判定 $x^2+1, x-1, x^2+x$ 的线性相关性.

例 2. 设 V 是 n 维线性空间，取定 V 的一个基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$. 设 $\beta_1, \cdots, \beta_m \in V$ 且 $\beta_i = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)A_i$, 其中 $A_1 = \begin{pmatrix} b_{i1} \\ b_{i2} \\ \cdots \\ b_{in} \end{pmatrix}$, $1 \le i \le m$. 记 $A = (A_1, A_2, \cdots, A_m)$. 则

(1). $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ 线性相关 $\Longleftrightarrow \mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A_1, A_2, \cdots, A_m) < m$;
(2). 向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ 的秩 $= \mathrm{rank}(A)$.

二. $\mathrm{Hom}(V,W) \cong F^{m\times n}$ 作为线性空间的同构

设 V 是 n 维线性空间，取定 V 的一个基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$. 设 W 是 m 维线性空间，取定 W 的一个基 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$. 对于 $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathrm{Hom}(V,W)$, 如果 $\mathcal{A}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m)A$ ， $\mathcal{B}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m)B$ ，这里 $A, B \in F^{m\times n}$. 则

$$(\mathcal{A}+\mathcal{B})(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m)(A+B),$$

$$(\lambda\mathcal{A})(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)(\lambda A).$$

这里 $\lambda\in F$.

在取定了 V 和 W 的基的条件下，令 $\phi:\mathcal{A}\mapsto A$, 则有 $\phi(\mathcal{A}+\mathcal{B})=A+B=\phi(\mathcal{A})+\phi(\mathcal{B})$, $\phi(\lambda\mathcal{A})=\lambda A=\lambda\phi(\mathcal{A})$. 这样 ϕ 导出了线性空间同构

$$\phi:\mathrm{Hom}(V,W)\cong F^{m\times n}.$$

特别地，当 $V=W$ 时，

$$(\mathcal{A}\mathcal{B})(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)(AB).$$

这样，$\phi(\mathcal{A}\mathcal{B})=AB=\phi(\mathcal{A})\phi(\mathcal{B})$. 所以，$\phi:\mathcal{A}\mapsto A$ 导出了有单位元的结合代数的同构

$$\phi:\mathrm{Hom}(V,V)\cong F^{n\times n}.$$

利用这个同构关系，易知 $\phi(\varepsilon)=E$; 对于任意 $f(x)\in F[x]$, $\phi(f(\mathcal{A}))=f(A)=f(\phi(\mathcal{A}))$. 我们可以将线性映射 (变换) 的问题和矩阵的问题互相转化.

例. 设 V 是 n 维线性空间，$\mathcal{A}\in\mathrm{Hom}(V,V)$. 若对于任意 $\mathcal{B}\in\mathrm{Hom}(V,V)$, 都有 $\mathcal{A}\mathcal{B}=\mathcal{B}\mathcal{A}$, 则存在 $\lambda\in F$, 使得 $\mathcal{A}=\lambda\varepsilon$.

证明提要: 取定 V 的一个基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$, 设 $\mathcal{A}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A$. 由于 $\mathcal{A}\mathcal{B}=\mathcal{B}\mathcal{A}$, 根据同构对应知对于任意 $B\in F^{n\times n}$ 都有 $AB=BA$. 由矩阵知识知 $A=\lambda E$, 所以 $\mathcal{A}=\lambda\varepsilon$.

例. 设 V 是 n 维线性空间，$\mathcal{A}\in\mathrm{Hom}(V,V)$, $\mathcal{A}^n=0$,$\mathcal{A}^{n-1}\neq0$. 证明：对于任意 $\mathcal{B}\in\mathrm{Hom}(V,V)$, 若满足 $\mathcal{A}\mathcal{B}=\mathcal{B}\mathcal{A}$. 则 $\mathcal{B}$ 可以表示成为 $\mathcal{B}=a_0\varepsilon+a_1\mathcal{A}+a_2\mathcal{A}^2+\cdots+a_{n-1}\mathcal{A}^{n-1}$.

证明提要: 因为 $\mathcal{A}^n=0$, $\mathcal{A}^{n-1}\neq0$, 所以存在 $0\neq\alpha\in V$, 使得 $\alpha,\mathcal{A}(\alpha),\mathcal{A}^2(\alpha)$, $\cdots$,$\mathcal{A}^{n-1}(\alpha)$ 线性无关，因而是 V 的一个基. $\mathcal{A}$ 在这个基下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&0\\1&0&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&1&0\end{pmatrix}.$$

设 $\mathcal{B}$ 在此基下的矩阵为 B. 根据同构关系，知 $AB=BA$. 由矩阵的知识可以得到 $B=a_0E+a_1A+a_2A^2+\cdots+a_{n-1}A^{n-1}$. 根据同构关系，知 $\mathcal{B}=a_0\varepsilon+a_1\mathcal{A}+a_2\mathcal{A}^2+\cdots+a_{n-1}\mathcal{A}^{n-1}$.

例 设 A 是复方阵. 则 A 可分解为 $A=B+C$, 其中 C 是幂零阵，B 是相似于对角阵的方阵，B 和 C 都是 A 的多项式，且 $CB=BC$, 并且这种分解是唯一的.

证明提要: 转化为线性变换的语言来证，即要证:

设 φ 是复数域上 n 维线性空间 V 的线性变换，则存在唯一一对线性变换 σ 和 τ, 使得:

(1) $\varphi=\sigma+\tau$, 其中 σ 是可对角化的线性变换，τ 是幂零线性变换，且 $\sigma\tau=\tau\sigma$;

(2) 存在复数域上的多项式 $p(\lambda),q(\lambda)$, 使得 $\sigma=p(\varphi)$, $\tau=q(\varphi)$.

证明 设 φ 的极小多项式为

$$m_\varphi(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{l_1}(\lambda-\lambda_2)^{l_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{l_s},$$

则有

$$V = R(\lambda_1) \oplus R(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus R(\lambda_s),$$

其中 $R(\lambda_i) = \mathrm{Ker}(\varphi - \lambda_i id)^{l_i}$, $1 \le i \le s$.

由于 $(\lambda-\lambda_1)^{l_1}, (\lambda-\lambda_2)^{l_2}, \cdots, (\lambda-\lambda_s)^{l_s}$ 两两互素，根据中国剩余定理，存在多项式 $p(\lambda)$, 使得对任意的 i, $1 \le i \le s$, 存在 $g_i(\lambda)$, 使得

$$p(\lambda) - \lambda_i = g_i(\lambda)(\lambda - \lambda_i)^{l_i}.$$

记 $q(\lambda) = \lambda - p(\lambda)$. 令 $\sigma = p(\varphi)$, $\tau = q(\varphi)$, 则 $\varphi = \sigma + \tau$.

对于任意的 $\alpha_i \in R(\lambda_i)$, 即 $\alpha_i \in \mathrm{Ker}(\varphi - \lambda_i id)^{l_i}$, 有

$$(p(\varphi) - \lambda_i id)(\alpha_i) = g_i(\varphi)(\varphi - \lambda_i id)^{l_i}(\alpha_1) = 0,$$

故 $p(\varphi)(\alpha_i) = \lambda_i \alpha_i$, $1 \le i \le s$. 这样 $p(\varphi)$ 可对角化.

对任意 $\alpha_i \in R(\lambda_i)$, 因为 $p(\varphi)(\alpha_i) = \lambda_i \alpha_i$, 所以 $\tau^{l_i}(\alpha_i) = (\varphi - p(\varphi))^{l_i}(\alpha_i) = (\varphi - \lambda_i id)^{l_i}(\alpha_i) = 0$. 取 $l = \max\{l_1, l_2, \cdots, l_s\}$, 则有 $\tau^l = 0$. 因此 τ 是幂零的线性变换.

下面证明唯一性. 设另有满足条件的分解 $\varphi = \sigma_1 + \tau_1$, 由 $\sigma_1\tau_1 = \tau_1\sigma_1$ 得到 $\sigma_1(\varphi - \sigma_1) = (\varphi - \sigma_1)\sigma_1$, 所以 σ_1 和 φ 可交换, 同理 φ 和 τ_1 可交换, 因为 σ 和 τ 都是 φ 的多项式, 所以显然 σ_1 和 σ 可交换， τ_1 和 τ 可交换，故 σ 和 σ_1 可同时对角化，即 $\sigma - \sigma_1$ 可对角化. 另一方面，从 τ 及 τ_1 的可交换和幂零性容易推出 $\tau_1 - \tau$ 也是幂零的线性变换. 事实上，若 $\tau^s = 0, \tau_1^t = 0$, 则 $(\tau_1 - \tau)^{s+t} = 0$. 但 $\sigma - \sigma_1 = \tau_1 - \tau$, 故 $\sigma_1 = \sigma$, $\tau_1 = \tau$. □

三. $\mathrm{Hom}(V, V) \cong F^{n\times n}$ 和 $V \cong F^n$ 的自然延拓

设 V 是 n 维线性空间. 对于 $\mathcal{A} \in \mathrm{Hom}(V, V)$, $\alpha \in V$, 有 $\mathcal{A}(\alpha) \in V$. 对于 $A \in F^{n\times n}$, $X \in F^n$, 有 $AX \in F^n$. 在取定 V 的一个基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 前提下, 因为 $\mathcal{A}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)A$ ， $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)X$, 这里 $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$. $\mathcal{A}(\alpha) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)(AX)$. 所以，在取定 V 的一个基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 前提下， $\mathrm{Hom}(V, V) \cong F^{n\times n}$, $V \cong F^n$ 导出了 $\mathrm{Hom}(V, V)$ 作用在 V 上和 $F^{n\times n}$ 作用在 F^n 上的对应. 利用这个对应，我们可以将许多相关问题互相转换.

注. 实际上, V 是代数 $\mathrm{Hom}(V, V)$ 上的模, F^n 是代数 $F^{n\times n}$ 上的模. $\mathrm{Hom}(V, V) \cong F^{n\times n}$ 和 $V \cong F^n$ 导出 $\mathrm{Hom}(V, V)$ 的模 V 和 $F^{n\times n}$ 的模 F^n 的同构 (参见林亚南，苏秀萍：" 广义模同构及其在高等代数中的应用 ", 宁德师专学报 10(1)(1998)33-35).

在取定 V 的一个基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 前提下， $\phi : \mathrm{Hom}(V, V) \cong F^{n\times n}$, $V \cong F^n$ 导出了如下对应：

$$\mathrm{Im}(\mathcal{A}) = \{\mathcal{A}(\alpha) \mid \alpha \in V\} \longleftrightarrow \{AX \mid X \in F^n\} = L(A_1, A_2, \cdots, A_n),$$

这里 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是 A 的列向量;

$$\mathrm{Ker}(\mathcal{A}) = \{\alpha \in V \mid \mathcal{A}(\alpha) = 0\} \longleftrightarrow \{X \in F^n \mid AX = 0\};$$

这样,

$$\dim(\mathrm{Im}\mathcal{A}) = \dim(L(A_1, A_2, \cdots, A_n)) = \mathrm{rank}(A);$$

$$\dim(\mathrm{Ker}(\mathcal{A})) = \dim(\{X \in F^n \mid AX = 0\}) = n - \mathrm{rank}(A).$$

这也从另一角度证明了维数公式 $\dim(\mathrm{Im}\mathcal{A}) + \dim(\mathrm{Ker}(\mathcal{A})) = n$. 根据这个对应，我们已经利用线性变换的观点来证明矩阵的秩的一些命题. 下面的有用矩阵观点来证明线性变换问题的例子，也有用线性变换观点来考虑矩阵性质的例子.

例. 设 V 是 n 维线性空间, $\mathcal{A} \in \mathrm{Hom}(V, V)$ 且 $\dim(\mathrm{Im}\mathcal{A}) = r$. 证明 $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \cdots + \mathcal{A}_r$, 且 $\dim(\mathrm{Im}\mathcal{A}_i) = 1$, $1 \le i \le r$.

证明提要：取定 V 的一个基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$, 设 $\mathcal{A}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)A$. 因为 $\dim(\mathrm{Im}\mathcal{A}) = r$, 所以 $\mathrm{rank}(A) = r$. 由矩阵理论知 $A = A_1 + A_2 + \cdots + A_r$, $\mathrm{rank}(A_i) = 1$, $1 \le i \le r$. 根据同构对应, 知存在 $\mathcal{A} \in \mathrm{Hom}(V, V)$, 使得 $\mathcal{A}_i(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)A_i$. 由于 $\mathrm{rank}(A_i) = 1$, 所以 $\dim(\mathrm{Im}\mathcal{A}_i) = 1$, $1 \le i \le r$.

例. 设 $A_1, A_2, \cdots, A_m \in F^{n\times n}$, $A_i \ne 0$, $1 \le i \le m$. 求证：存在 $X \in F^n$, 使得 $A_iX \ne 0$, $1 \le i \le m$.

证明提要. 设 V 是 n 维线性空间，取定 V 的一个基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$. 由同构关系，存在 $\mathcal{A}_i \in \mathrm{Hom}(V, V)$, $1 \le i \le m$, 使得 $\mathcal{A}_i(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)A_i$, $1 \le i \le m$. 由习题结论知存在 $0 \ne \alpha \in V$, 使得 $\mathcal{A}_i(\alpha) \ne 0$, $1 \le i \le m$. 由同构关系知存在 $0 \ne X \in F^n$, 使得 $A_iX \ne 0$, $1 \le i \le m$.

例. 设 V 是 n 维线性空间， $0 \ne \alpha \in V$. 求证 $\{\mathcal{A}(\alpha) \mid \mathcal{A} \in \mathrm{Hom}(V, V)\} = V$.

证明提要： 在同构意义下，要证明： $0 \ne X \in F^n$, 则 $\{AX \mid A \in F^{n\times n}\} = F^n$. 事实上，设 $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)'$. 由于 $X \ne 0$, 不妨设 $x_j \ne 0$. 则 $E_i = \frac{1}{x_j}E_{ij}X$, $1 \le i \le n$. 因为 $E_1, E_2, \cdots, E_n$ 是 F^n 的基，所以 $\{AX \mid A \in F^{n\times n}\} = F^n$.

由 $\mathrm{Hom}(V, V) \cong F^{n\times n}$, $V \cong F^n$, 我们知道，关于矩阵的结论和关于线性变换的结论是互相对应的. 所以，在证明一个命题时，我们常常至少有至少两种观点和方法.