从线性同构谈起

厦门大学 数学科学学院

从线性同构谈起

厦门大学　数学科学学院

目录

线性空间的同构

- **单的且满的线性映射称为线性同构.**
  数域F上的线性空间V, W称为同构,如果存在线性同构$\phi : V \to W$.
- 定理. 设V, W是线性空间. 则$\phi : V \cong W \Longleftrightarrow$ 存在线性映射$\psi : W \to V$,使得$\phi\psi = id_W$, $\psi\phi = id_V$.

线性空间的同构

- **单的且满的线性映射称为线性同构.**

  数域F上的线性空间V, W称为同构,如果存在线性同构$\phi : V \to W$.

- **定理. 设V, W是线性空间. 则$\phi : V \cong W \Longleftrightarrow$ 存在线性映射$\psi : W \to V$,使得$\phi\psi = id_W,\ \psi\phi = id_V$.**

- 定理. 设V, W是有限维线性空间. 则$V \cong W \Longleftrightarrow \dim(V) = \dim(W)$.

线性空间的同构

- 单的且满的线性映射称为**线性同构**.

  数域F上的线性空间V, W称为**同构**,如果存在线性同构$\phi : V \to W$.

- **定理**. 设V, W是线性空间. 则$\phi : V \cong W \Longleftrightarrow$ 存在线性映射$\psi : W \to V$,使得$\phi\psi = id_W,\ \psi\phi = id_V$.

- **定理**. 设V, W是有限维线性空间. 则$V \cong W \Longleftrightarrow \dim(V) = \dim(W)$.

线性空间的同构

- 线性空间的同构保持向量间的线性关系.

线性空间的同构

- 线性空间的同构保持向量间的线性关系.
- 线性空间的同构保持子空间和直和分解的关系.

线性空间的同构

- 线性空间的同构保持向量间的线性关系.
- 线性空间的同构保持子空间和直和分解的关系.
- 设V是n维线性空间, 取定V的一个基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$. 对于任意$\alpha\in V$在此基下的坐标是$(a_1,a_2,\cdots,a_n)'$, 则$\phi:\alpha\mapsto(a_1,a_2,\cdots,a_n)'$导出了$V\cong F^n$. 这样, n维线性空间的问题可以化为F^n来处理.

例1.1

判定$1, x-1, (x-1)(x-2)$的线性相关性.

例1.1

判定$1, x-1, (x-1)(x-2)$的线性相关性.

例1.2

设V是n维线性空间, 取定V的一个基$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$.

设$\beta_1, \cdots, \beta_m \in V$且$\beta_i = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)A_i$, 其中$A_i = \begin{pmatrix} b_{i1} \\ b_{i2} \\ \vdots \\ b_{in} \end{pmatrix}$, $1 \leq i \leq m$.

记$A = (A_1, A_2, \cdots, A_m)$.则

(1) $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$线性相关$\Longleftrightarrow rank(A) = rank(A_1, A_2, \cdots, A_m) < m$;

(2) 向量组$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$的秩$= rank(A)$.

$L(V,W)$与$F^{m\times n}$作为线性空间的同构

设V是n维线性空间, 取定V的一个基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$.

设W是m维线性空间, 取定W的一个基$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$.

对于$\mathcal{A}\in L(V,W)$, 如果$\mathcal{A}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)A$，$A\in F^{m\times n}$,

则$\phi:\mathcal{A}\mapsto A$, 导出了线性空间同构

$$\phi: L(V,W)\cong F^{m\times n}.$$

$L(V,W)$与$F^{m\times n}$作为线性空间的同构

设V是n维线性空间, 取定V的一个基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$.

设W是m维线性空间, 取定W的一个基$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$.

对于$\mathcal{A}\in L(V,W)$, 如果$\mathcal{A}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)A$，$A\in F^{m\times n}$,

则$\phi:\mathcal{A}\mapsto A$, 导出了线性空间同构

$$\phi: L(V,W)\cong F^{m\times n}.$$

特别地, 当$V=W$时, $\phi:\mathcal{A}\mapsto A$导出了有单位元的结合代数的同构

$$\phi: L(V)\cong F^{n\times n}.$$

$L(V,W)$与$F^{m\times n}$作为线性空间的同构

设V是n维线性空间, 取定V的一个基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$.

设W是m维线性空间, 取定W的一个基$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$.

对于$\mathcal{A}\in L(V,W)$, 如果$\mathcal{A}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)A$，$A\in F^{m\times n}$,

则$\phi:\mathcal{A}\mapsto A$, 导出了线性空间同构

$$\phi: L(V,W)\cong F^{m\times n}.$$

特别地, 当$V=W$时, $\phi:\mathcal{A}\mapsto A$导出了有单位元的结合代数的同构

$$\phi: L(V)\cong F^{n\times n}.$$

利用该同构关系, 我们可将线性映射(变换)的问题和矩阵的问题互相转化.

例2.1

设V是n维线性空间, $\mathcal{A} \in L(V)$. 若对于任意$\mathcal{B} \in L(V)$, 都有$\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$, 则存在$\lambda \in F$, 使得$\mathcal{A} = \lambda\varepsilon$.

例2.1

设V是n维线性空间, $\mathcal{A} \in L(V)$. 若对于任意$\mathcal{B} \in L(V)$, 都有$\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$, 则存在$\lambda \in F$, 使得$\mathcal{A} = \lambda\varepsilon$.

例2.2

设V是n维线性空间, $\mathcal{A} \in L(V)$, $\mathcal{A}^n = 0$,$\mathcal{A}^{n-1} \neq 0$. 证明: 对于任意$\mathcal{B} \in L(V)$, 若满足$\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$. 则$\mathcal{B}$可以表示成为$\mathcal{B} = a_0\varepsilon + a_1\mathcal{A} + a_2\mathcal{A}^2 + \cdots + a_{n-1}\mathcal{A}^{n-1}$.

例2.3

设V是n维线性空间, $\varphi \in L(V)$. 证明：存在$\psi, \sigma \in L(V)$, 使得$\varphi = \psi\sigma$，其中$\psi^2 = \psi$且σ可逆.

例2.3

设V是n维线性空间, $\varphi \in L(V)$. 证明：存在$\psi, \sigma \in L(V)$, 使得$\varphi = \psi\sigma$，其中$\psi^2 = \psi$且σ可逆.

例2.4 (Jordan-Chevalley分解)

设$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$，证明：$A$可唯一分解为$A = B + C$,其中$C$是幂零阵，$B$可对角化且$CB = BC$.

$V \cong F^n$与$L(V,W) \cong F^{m\times n}$的自然延拓

设V，W分别是n维和m维线性空间,
$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$及$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$分别是$V$和$W$的一组基.
对于$\varphi \in L(V,W)$, 如果$\varphi(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)A$，
又设η_1,η_2分别是$V\to F^n$和$W\to F^m$的线性同构，
将A看成F^n到F^m的线性映射，则有

$$\eta_2\varphi = A\eta_1 \text{且} \eta_2(Im\varphi)=ImA, \eta_1(ker\varphi)=kerA.$$

$V \cong F^n$与$L(V,W) \cong F^{m\times n}$的自然延拓

- $dim(Im(\varphi)) = rank(A).$

$V \cong F^n$与$L(V,W) \cong F^{m\times n}$的自然延拓

- $dim(Im(\varphi)) = rank(A)$.
- $dim(Ker(\varphi)) = n - rank(A)$.
- 这也从另一角度证明了维数公式$dim(Im(\varphi)) + dim(Ker(\varphi)) = n$.

$V \cong F^n$与$L(V,W) \cong F^{m\times n}$的自然延拓

- $dim(Im(\varphi)) = rank(A)$.
- $dim(Ker(\varphi)) = n - rank(A)$.
- 这也从另一角度证明了维数公式$dim(Im(\varphi)) + dim(Ker(\varphi)) = n$.

- 例3.1. 设V是n维线性空间, $\mathcal{A} \in L(V)$且$dim(\mathrm{Im}\mathcal{A}) = r$. 证明: $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \cdots + \mathcal{A}_r$, 且$dim(\mathrm{Im}\mathcal{A}_i) = 1$, $1 \leq i \leq r$.

- 例3.1. 设V是n维线性空间, $\mathcal{A} \in L(V)$且$dim(\mathrm{Im}\mathcal{A}) = r$. 证明: $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \cdots + \mathcal{A}_r$, 且$dim(\mathrm{Im}\mathcal{A}_i) = 1$, $1 \leq i \leq r$.
- 例3.2. 设$A_1, A_2, \cdots, A_m \in F^{n\times n}$, $A_i \neq 0$, $1 \leq i \leq m$. 求证: 存在$X \in F^n$, 使得$A_i X \neq 0$, $1 \leq i \leq m$.

- 例3.1. 设V是n维线性空间, $\mathcal{A} \in L(V)$且$dim(\mathrm{Im}\mathcal{A}) = r$. 证明: $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \cdots + \mathcal{A}_r$, 且$dim(\mathrm{Im}\mathcal{A}_i) = 1$, $1 \leq i \leq r$.
- 例3.2. 设$A_1, A_2, \cdots, A_m \in F^{n\times n}$, $A_i \neq 0$, $1 \leq i \leq m$. 求证: 存在$X \in F^n$, 使得$A_i X \neq 0$, $1 \leq i \leq m$.
- 例3.3. 设V是n维线性空间, $0 \neq \alpha \in V$. 求证: $\{\mathcal{A}(\alpha) \mid \mathcal{A} \in L(V)\} = V$.

思考题

- **题1.** 设$A \in F^{n\times n}$, $A^2 = A$, $A = A_1 + A_2$, $rank(A) = rank(A_1) + rank(A_2)$. 求证: $A_i^2 = A_i$, $i = 1, 2$; $A_iA_j = 0$, $1 \le i \ne j \le 2$.

思考题

- **题1.** 设$A \in F^{n\times n}$, $A^2 = A$, $A = A_1 + A_2$, $rank(A) = rank(A_1) + rank(A_2)$. 求证: $A_i^2 = A_i$, $i = 1, 2$; $A_iA_j = 0$, $1 \leq i \neq j \leq 2$.
- **题2.** 设V是n维线性空间, $\mathcal{A} \in L(V)$. 求证:

  (1) $\dim(Ker\mathcal{A}^2) \leq 2\dim(Ker\mathcal{A})$.

  (2) 如果$\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$, 则$V = \mathrm{Im}\mathcal{A} \oplus \mathrm{Im}(\mathcal{A} - id_V)$.

思考题

- **题1.** 设$A \in F^{n\times n}$, $A^2 = A$, $A = A_1 + A_2$, $rank(A) = rank(A_1) + rank(A_2)$. 求证: $A_i^2 = A_i$, $i = 1, 2$; $A_iA_j = 0$, $1 \leq i \neq j \leq 2$.
- **题2.** 设V是n维线性空间, $\mathcal{A} \in L(V)$. 求证:

  (1) $\dim(Ker\mathcal{A}^2) \leq 2\dim(Ker\mathcal{A})$.

  (2) 如果$\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$, 则$V = \mathrm{Im}\mathcal{A} \oplus \mathrm{Im}(\mathcal{A} - id_V)$.
- **题3.** 设$A \in F^{n\times n}$, 如果存在正整数t, 使得$rank(A^t) = rank(A^{t+1})$, 则对于任意正整数$s$, 都有$rank(A^t) = rank(A^{t+s})$.

思考题

- **题1.** 设$A \in F^{n\times n}$, $A^2 = A$, $A = A_1 + A_2$, $rank(A) = rank(A_1) + rank(A_2)$. 求证: $A_i^2 = A_i$, $i = 1, 2$; $A_iA_j = 0$, $1 \le i \ne j \le 2$.
- **题2.** 设V是n维线性空间, $\mathcal{A} \in L(V)$. 求证:

  (1) $\dim(Ker\mathcal{A}^2) \le 2\dim(Ker\mathcal{A})$.

  (2) 如果$\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$, 则$V = \mathrm{Im}\mathcal{A} \oplus \mathrm{Im}(\mathcal{A} - id_V)$.
- **题3.** 设$A \in F^{n\times n}$, 如果存在正整数t, 使得$rank(A^t) = rank(A^{t+1})$, 则对于任意正整数$s$, 都有$rank(A^t) = rank(A^{t+s})$.

思考题

- **题4.** 设V是n维线性空间, $\mathcal{A} \in L(V)$. 求证:

  (1) 存在$f(x) \in F[x]$, 使得$f(\mathcal{A}) = 0$;

  (2) $\mathcal{A}$可逆$\Longleftrightarrow$ 存在常数项非零的$f(x) \in F[x]$, 使得$f(\mathcal{A}) = 0$;

  (3) $W = \{f(x) \in F[x] \mid f(\mathcal{A}) = 0\}$中存在首项系数为1的$g(x)$, 使得对于任意$f(x) \in W$, 都有$g(x) | f(x)$.

思考题

- **题4.** 设V是n维线性空间, $\mathcal{A} \in L(V)$. 求证:

  (1) 存在$f(x) \in F[x]$, 使得$f(\mathcal{A}) = 0$;

  (2) $\mathcal{A}$可逆$\Longleftrightarrow$ 存在常数项非零的$f(x) \in F[x]$, 使得$f(\mathcal{A}) = 0$;

  (3) $W = \{f(x) \in F[x] \mid f(\mathcal{A}) = 0\}$中存在首项系数为1的$g(x)$, 使得对于任意$f(x) \in W$, 都有$g(x) | f(x)$.

- **题5.** 设V是n维线性空间. 求证:对于任意$\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$, 都有$\mathcal{A}\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{A} \neq \varepsilon$.

Thank you!