从线性映射的维数公式谈起

厦门大学 数学科学学院

目录

目录

目录

- §1 维数公式和证明
- §2 维数公式的拓广和应用
- §3 基的选取和线性映射的构造

- 维数公式: 设V, W分别是n和m维线性空间, $\mathcal{A}: V \to W$是线性映射, 则

$$\mathsf{dim}(\mathsf{Im}\mathcal{A}) + \dim(\mathsf{Ker}\mathcal{A}) = \dim(V).$$

证明1. 扩基法

证明2. 同构法

§1 维数公式和证明

- 维数公式: 设V, W分别是n和m维线性空间, $\mathcal{A}: V \to W$是线性映射, 则

$$\dim(\mathrm{Im}\mathcal{A}) + \dim(\mathrm{Ker}\mathcal{A}) = \dim(V).$$

证明1. 扩基法

证明2. 同构法

§1 维数公式和证明

- 维数公式: 设V, W分别是n和m维线性空间, $\mathcal{A}: V \to W$是线性映射, 则

$$\dim(\mathrm{Im}\mathcal{A}) + \dim(\mathrm{Ker}\mathcal{A}) = \dim(V).$$

证明1. 扩基法

证明2. 同构法

说明

设V是n维线性空间, W是m维线性空间, $\mathcal{A}:V\rightarrow W$是线性映射. 取定$V$的一组基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$和$W$的一组基$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$. 设

$$\mathcal{A}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)A.$$

对于A, 定义线性映射$A:F^n\rightarrow F^m$, 对于任意的$X\in F^n$, $X\mapsto AX$. 另一方面，存在线性空间的同构

$$\eta_1:V\rightarrow F^n,\ \eta_2:W\rightarrow F^m.$$

我们有如下命题:

命题

记号如上, 则存在交换图

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\mathcal{A}} & W \\ \downarrow \eta_1 & & \downarrow \eta_2 \\ F^n & \xrightarrow{A} & F^m \end{array}$$

即$\eta_2\mathcal{A} = A\eta_1$, 且$\eta_2(\mathrm{Im}\mathcal{A}) = \mathrm{Im}A$, $\eta_1(\mathrm{Ker}\mathcal{A}) = \mathrm{Ker}A$.

- 注 在命题中的同构对应下,
- $\dim(\mathrm{Im}\mathcal{A}) = \dim(\mathrm{Im}A) = A$的列空间的维数$= r(A)$;
  $\dim(\mathrm{Ker}\mathcal{A}) = \dim(\mathrm{Ker}A) = \dim\{AX = 0$解空间$\} = n - r(A)$;
- $\mathcal{A}$是单的$\Leftrightarrow \mathrm{Ker}\mathcal{A} = 0 \Leftrightarrow r(A) = n$;
  $\mathcal{A}$是满的$\Leftrightarrow \mathrm{Im}\mathcal{A} = W \Leftrightarrow \dim A = F^m \Leftrightarrow r(A) = m$.

命题

记号如上, 则存在交换图

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\mathcal{A}} & W \\ \downarrow \eta_1 & & \downarrow \eta_2 \\ F^n & \xrightarrow{A} & F^m \end{array}$$

即$\eta_2\mathcal{A} = A\eta_1$, 且$\eta_2(\mathrm{Im}\mathcal{A}) = \mathrm{Im}A$, $\eta_1(\mathrm{Ker}\mathcal{A}) = \mathrm{Ker}A$.

- 注 在命题中的同构对应下,
- $\dim(\mathrm{Im}\mathcal{A}) = \dim(\mathrm{Im}A) = A$的列空间的维数$= r(A)$;
  $\dim(\mathrm{Ker}\mathcal{A}) = \dim(\mathrm{Ker}A) = \dim\{AX = 0$解空间$\} = n - r(A)$;
- $\mathcal{A}$是单的$\Leftrightarrow \mathrm{Ker}\mathcal{A} = 0 \Leftrightarrow r(A) = n$;
  $\mathcal{A}$是满的$\Leftrightarrow \mathrm{Im}\mathcal{A} = W \Leftrightarrow \dim A = F^m \Leftrightarrow r(A) = m$.

命题

记号如上, 则存在交换图

$$
\begin{array}{ccc}
V & \xrightarrow{\mathcal{A}} & W \\
\downarrow \eta_1 & & \downarrow \eta_2 \\
F^n & \xrightarrow{A} & F^m
\end{array}
$$

即$\eta_2\mathcal{A} = A\eta_1$, 且$\eta_2(\mathrm{Im}\mathcal{A}) = \mathrm{Im}A$, $\eta_1(\mathrm{Ker}\mathcal{A}) = \mathrm{Ker}A$.

- 注 在命题中的同构对应下,
- $\dim(\mathrm{Im}\mathcal{A}) = \dim(\mathrm{Im}A) = A$的列空间的维数$= r(A)$;
  $\dim(\mathrm{Ker}\mathcal{A}) = \dim(\mathrm{Ker}A) = \dim\{AX = 0$解空间$\} = n - r(A)$;
- $\mathcal{A}$是单的$\Leftrightarrow \mathrm{Ker}\mathcal{A} = 0 \Leftrightarrow r(A) = n$;
  $\mathcal{A}$是满的$\Leftrightarrow \mathrm{Im}\mathcal{A} = W \Leftrightarrow \dim A = F^m \Leftrightarrow r(A) = m$.

命题

记号如上, 则存在交换图

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\mathcal{A}} & W \\ \downarrow \eta_1 & & \downarrow \eta_2 \\ F^n & \xrightarrow{A} & F^m \end{array}$$

即$\eta_2\mathcal{A} = A\eta_1$, 且$\eta_2(\mathrm{Im}\mathcal{A}) = \mathrm{Im}A$, $\eta_1(\mathrm{Ker}\mathcal{A}) = \mathrm{Ker}A$.

- 注 在命题中的同构对应下,
- $\dim(\mathrm{Im}\mathcal{A}) = \dim(\mathrm{Im}A) = A$的列空间的维数$= r(A)$;
  $\dim(\mathrm{Ker}\mathcal{A}) = \dim(\mathrm{Ker}A) = \dim\{AX = 0$解空间$\} = n - r(A)$;
- $\mathcal{A}$是单的$\Leftrightarrow \mathrm{Ker}\mathcal{A} = 0 \Leftrightarrow r(A) = n$;
  $\mathcal{A}$是满的$\Leftrightarrow \mathrm{Im}\mathcal{A} = W \Leftrightarrow \dim\mathcal{A} = F^m \Leftrightarrow r(A) = m$.

命题

记号如上, 则存在交换图

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\mathcal{A}} & W \\ \downarrow \eta_1 & & \downarrow \eta_2 \\ F^n & \xrightarrow{A} & F^m \end{array}$$

即$\eta_2\mathcal{A} = A\eta_1$, 且$\eta_2(\mathrm{Im}\mathcal{A}) = \mathrm{Im}A$, $\eta_1(\mathrm{Ker}\mathcal{A}) = \mathrm{Ker}A$.

- 注 在命题中的同构对应下,
- $\dim(\mathrm{Im}\mathcal{A}) = \dim(\mathrm{Im}A) = A$的列空间的维数$= r(A)$;
  $\dim(\mathrm{Ker}\mathcal{A}) = \dim(\mathrm{Ker}A) = \dim\{AX = 0$解空间$\} = n - r(A)$;
- $\mathcal{A}$是单的$\Leftrightarrow \mathrm{Ker}\mathcal{A} = 0 \Leftrightarrow r(A) = n$;
  $\mathcal{A}$是满的$\Leftrightarrow \mathrm{Im}\mathcal{A} = W \Leftrightarrow \dim A = F^m \Leftrightarrow r(A) = m$.

§2 维数公式的拓广和应用

- 例2.1 设V, W是有限维线性空间, $\mathcal{A} : V \to W$是线性映射. 设U是V的子空间, 则

$$\dim(\mathrm{Im}\mathcal{A}(U)) + \dim(\mathrm{Ker}\mathcal{A} \cap U) = \dim(U).$$

- 例2.2 设V, W是有限维线性空间, $\mathcal{A} : V \to W$是线性映射. 设U是W的子空间, 则

$$\dim(\mathrm{Im}\mathcal{A} \cap U) + \dim(\mathrm{Ker}\mathcal{A}) = \dim(\mathcal{A}^{-1}(U)).$$

- 例2.3 设V, W, U是有限维线性空间, $\mathcal{A} : V \to W, \mathcal{B} : W \to U$是线性映射, 则

$$\dim(\mathrm{Im}\mathcal{B}\mathcal{A}) + \dim(\mathrm{Ker}\mathcal{B} \cap \mathrm{Im}\mathcal{A}) = \dim(\mathrm{Im}\mathcal{A}).$$

§2 维数公式的拓广和应用

- 例2.1 设V, W是有限维线性空间, $\mathcal{A}: V \to W$是线性映射. 设U是V的子空间, 则

$$\dim(\mathrm{Im}\mathcal{A}(U)) + \dim(\mathrm{Ker}\mathcal{A} \cap U) = \dim(U).$$

- 例2.2 设V, W是有限维线性空间, $\mathcal{A}: V \to W$是线性映射. 设U是W的子空间, 则

$$\dim(\mathrm{Im}\mathcal{A} \cap U) + \dim(\mathrm{Ker}\mathcal{A}) = \dim(\mathcal{A}^{-1}(U)).$$

- 例2.3 设V, W, U是有限维线性空间, $\mathcal{A}: V \to W, \mathcal{B}: W \to U$是线性映射, 则

$$\dim(\mathrm{Im}\mathcal{B}\mathcal{A}) + \dim(\mathrm{Ker}\mathcal{B} \cap \mathrm{Im}\mathcal{A}) = \dim(\mathrm{Im}\mathcal{A}).$$

§2 维数公式的拓广和应用

- 例2.1 设V, W是有限维线性空间, $\mathcal{A}: V \to W$是线性映射. 设U是V的子空间, 则

$$\dim(\mathrm{Im}\mathcal{A}(U)) + \dim(\mathrm{Ker}\mathcal{A} \cap U) = \dim(U).$$

- 例2.2 设V, W是有限维线性空间, $\mathcal{A}: V \to W$是线性映射. 设U是W的子空间, 则

$$\dim(\mathrm{Im}\mathcal{A} \cap U) + \dim(\mathrm{Ker}\mathcal{A}) = \dim(\mathcal{A}^{-1}(U)).$$

- 例2.3 设V, W, U是有限维线性空间, $\mathcal{A}: V \to W$,$\mathcal{B}: W \to U$是线性映射, 则

$$\dim(\mathrm{Im}\mathcal{B}\mathcal{A}) + \dim(\mathrm{Ker}\mathcal{B} \cap \mathrm{Im}\mathcal{A}) = \dim(\mathrm{Im}\mathcal{A}).$$

- 注1 设A, B分别是数域F上的$n \times m$ 及$s \times n$阶矩阵, 则

$$r(A) + r(B) - n \leq r(BA) \leq \min\{r(A), r(B)\}.$$

- 注2 设A, B, C分别是数域F上的$n \times m$, $s \times n$及$t \times s$阶矩阵, 则

$$r(CBA) \geq r(CB) + r(BA) - r(B).$$

- 注1 设A, B分别是数域F上的$n \times m$ 及$s \times n$阶矩阵, 则

$$r(A)+r(B)-n \leq r(BA) \leq \min\{r(A), r(B)\}.$$

- 注2 设A, B, C分别是数域F上的$n \times m$, $s \times n$及$t \times s$阶矩阵, 则

$$r(CBA) \geq r(CB)+r(BA)-r(B).$$

§3 基的选取和线性映射的构造

- 例3.1 设V是n维线性空间, W, U是V的子空间且$\dim(W) + \dim(U) = \dim(V)$. 证明:存在$V$的线性变换$\mathcal{A}$, 使得$\mathrm{Im}\mathcal{A} = W$, $\mathrm{Ker}\mathcal{A} = U$.
- 例3.2 设V是n维线性空间, W是m维线性空间, $\mathcal{A} : V \to W$是单线性映射. 求证: 存在线性映射$\mathcal{B} : W \to V$, 使得$\mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{E}$.
- 例3.3 设V是n维线性空间, W是m维线性空间, $\mathcal{A} : V \to W$是线性映射. 求证: 存在线性空间U, 满的线性映射$\mathcal{B} : V \to U$和单的线性映射$\mathcal{C} : U \to W$, 使得$\mathcal{A} = \mathcal{C}\mathcal{B}$.

§3 基的选取和线性映射的构造

- 例3.1 设V是n维线性空间, W, U是V的子空间且$\dim(W)+\dim(U)=\dim(V)$. 证明:存在V的线性变换$\mathcal{A}$, 使得$\mathrm{Im}\mathcal{A}=W$, $\mathrm{Ker}\mathcal{A}=U$.

- 例3.2 设V是n维线性空间, W是m维线性空间, $\mathcal{A}:V\to W$是单线性映射. 求证: 存在线性映射$\mathcal{B}:W\to V$, 使得$\mathcal{B}\mathcal{A}=\mathcal{E}$.

- 例3.3 设V是n维线性空间, W是m维线性空间, $\mathcal{A}:V\to W$是线性映射. 求证: 存在线性空间U, 满的线性映射$\mathcal{B}:V\to U$和单的线性映射$\mathcal{C}:U\to W$, 使得$\mathcal{A}=\mathcal{C}\mathcal{B}$.

§3 基的选取和线性映射的构造

- 例3.1 设V是n维线性空间, W, U是V的子空间且$\dim(W)+\dim(U)=\dim(V)$. 证明:存在V的线性变换$\mathcal{A}$, 使得$\mathrm{Im}\mathcal{A}=W$, $\mathrm{Ker}\mathcal{A}=U$.
- 例3.2 设V是n维线性空间, W是m维线性空间, $\mathcal{A}: V\to W$是单线性映射. 求证: 存在线性映射$\mathcal{B}: W\to V$, 使得$\mathcal{B}\mathcal{A}=\mathcal{E}$.
- 例3.3 设V是n维线性空间, W是m维线性空间, $\mathcal{A}: V\to W$是线性映射. 求证: 存在线性空间U, 满的线性映射$\mathcal{B}: V\to U$和单的线性映射$\mathcal{C}: U\to W$, 使得$\mathcal{A}=\mathcal{C}\mathcal{B}$.

§3 基的选取和线性映射的构造

- 例3.4 设V是n维线性空间, W是m维线性空间, $\mathcal{A}: V \to W$是线性映射. 求证: 存在V的一组基$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$和$W$的一组基$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$, 使得

$$\mathcal{A}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m) \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 例3.5 设V是n维线性空间, W是m维线性空间, $\mathcal{A}: V \to W$是线性映射. 求证: 存在线性映射$\mathcal{B}: W \to V$, 使得$\mathcal{ABA} = \mathcal{A}$.

- 例3.6 设V是n维线性空间,W是m维线性空间, U是l维线性空间, $\mathcal{A}: V \to W$, $\mathcal{B}: V \to U$是线性映射. 求证: 存在线性映射$\mathcal{C}: W \to U$使得$\mathcal{CA} = \mathcal{B}$的充分必要条件是Ker$\mathcal{A} \subseteq$ Ker$\mathcal{B}$.

§3 基的选取和线性映射的构造

- 例3.4 设V是n维线性空间, W是m维线性空间, $\mathcal{A}: V \to W$是线性映射. 求证: 存在V的一组基$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$和$W$的一组基$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$, 使得

$$\mathcal{A}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m) \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 例3.5 设V是n维线性空间, W是m维线性空间, $\mathcal{A}: V \to W$是线性映射. 求证: 存在线性映射$\mathcal{B}: W \to V$, 使得$\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{A}$.

- 例3.6 设V是n维线性空间,W是m维线性空间, U是l维线性空间, $\mathcal{A}: V \to W$, $\mathcal{B}: V \to U$是线性映射. 求证: 存在线性映射$\mathcal{C}: W \to U$使得$\mathcal{C}\mathcal{A} = \mathcal{B}$的充分必要条件是Ker$\mathcal{A} \subseteq$ Ker$\mathcal{B}$.

- 例3.4 设V是n维线性空间, W是m维线性空间, $\mathcal{A}: V \to W$是线性映射. 求证: 存在V的一组基$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$和$W$的一组基$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$, 使得

$$\mathcal{A}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m) \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 例3.5 设V是n维线性空间, W是m维线性空间, $\mathcal{A}: V \to W$是线性映射. 求证: 存在线性映射$\mathcal{B}: W \to V$, 使得$\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{A}$.

- 例3.6 设V是n维线性空间,W是m维线性空间, U是l维线性空间, $\mathcal{A}: V \to W$, $\mathcal{B}: V \to U$是线性映射. 求证: 存在线性映射$\mathcal{C}: W \to U$使得$\mathcal{C}\mathcal{A} = \mathcal{B}$的充分必要条件是Ker$\mathcal{A} \subseteq$ Ker$\mathcal{B}$.

- 例3.7 设$\mathcal{A},\mathcal{B}$是n维线性空间V的线性变换, $\mathcal{A}^2=\mathcal{A}$, $\mathcal{B}^2=\mathcal{B}$, 且$r(\mathcal{A})=r(\mathcal{B})$. 证明: 存在可逆线性变换$\mathcal{C}$, 使得$\mathcal{A}\mathcal{C}=\mathcal{C}\mathcal{B}$.

- 例3.8 设$\mathcal{A}$是n维线性空间V的线性变换, 证明: 存在V的线性变换$\mathcal{P},\mathcal{Q},\mathcal{B},\mathcal{C}$, 使得

$$\mathcal{A}=\mathcal{P}\mathcal{B}=\mathcal{C}\mathcal{Q},$$

其中$\mathcal{P},\mathcal{Q}$是V的可逆线性变换, $\mathcal{B}^2=\mathcal{B}$, $\mathcal{C}^2=\mathcal{C}$.

- 例3.7 设$\mathcal{A},\mathcal{B}$是n维线性空间V的线性变换, $\mathcal{A}^2=\mathcal{A}$, $\mathcal{B}^2=\mathcal{B}$, 且$r(\mathcal{A})=r(\mathcal{B})$. 证明: 存在可逆线性变换$\mathcal{C}$, 使得$\mathcal{A}\mathcal{C}=\mathcal{C}\mathcal{B}$.

- 例3.8 设$\mathcal{A}$是n维线性空间V的线性变换, 证明: 存在V的线性变换$\mathcal{P},\mathcal{Q},\mathcal{B},\mathcal{C}$, 使得

$$\mathcal{A}=\mathcal{P}\mathcal{B}=\mathcal{C}\mathcal{Q},$$

其中$\mathcal{P},\mathcal{Q}$是V的可逆线性变换, $\mathcal{B}^2=\mathcal{B}$, $\mathcal{C}^2=\mathcal{C}$.

思 考

- 思考1 设A, B是数域F上的n阶方阵, W_0为$ABX = 0$的解空间有限维线性空间, 记$W_1 = \{BX|x \in W_0\}$, 求证:

$$\mathrm{dim}W_1 = r(B) - r(AB).$$

- 思考2 设V是n维线性空间,W是m维线性空间, $\mathcal{A} : V \to W$, $\mathcal{B} : V \to W$是线性映射. 求证: 存在可逆线性变换$\mathcal{C} : W \to W$,使得$\mathcal{C}\mathcal{A} = \mathcal{B}$的充分必要条件是$\mathrm{Ker}\mathcal{A} = \mathrm{Ker}\mathcal{B}$.

思 考

- 思考1 设A, B是数域F上的n阶方阵, W_0为$ABX=0$的解空间有限维线性空间, 记$W_1=\{BX|x\in W_0\}$, 求证:

$$\mathrm{dim}W_1 = r(B) - r(AB).$$

- 思考2 设V是n维线性空间,W是m维线性空间, $\mathcal{A}: V\to W$, $\mathcal{B}: V\to W$是线性映射. 求证: 存在可逆线性变换$\mathcal{C}: W\to W$,使得$\mathcal{CA}=\mathcal{B}$的充分必要条件是$\mathrm{Ker}\mathcal{A}=\mathrm{Ker}\mathcal{B}$.

谢 谢!