从矩阵的相抵谈起

厦门大学数学科学学院　林亚南

2008 年 4 月

设 F 是一个数域，$A, B \in F^{m\times n}$. 称 A 相抵于 B, 如果 A 可以经过一系列行的和列的初等变换化为 A, 等价地，如果存在可逆矩阵 $P \in F^{m\times m}$, $Q \in F^{n\times n}$, 使得 $A = PBQ$.

§1. 等价关系与等价分类

定义 1　给定集合 $\mathcal{S}$, 设集合 $\{\mathcal{S}_i | i \in I\}$, I 为有限或无限集，是集合 $\mathcal{S}$ 的子集族，若满足：

(1) $\mathcal{S} = \bigcup\limits_{i\in I} \mathcal{S}_i$;

(2) $\mathcal{S}_i \bigcap \mathcal{S}_j = \emptyset (i \neq j, i, j \in I)$.

则称 $\{\mathcal{S}_i | i \in I\}$ 是 $\mathcal{S}$ 的一个分类，$\mathcal{S}_i$ 称为 $\mathcal{S}$ 的一个类.

注 (1) 的含义为：对于任意的 $s \in \mathcal{S}$, 必存在 $i \in I$, 使 $s \in \mathcal{S}_i$, 即每个元必在一类中；(2) 的含义为：每个元素只能在一类中.

定义 2　设 $\mathcal{S}$ 是一个集合，$\mathcal{T}$ 是 $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ 的子集. 则我们称 $\mathcal{T}$ 定义了 $\mathcal{S}$ 的一个二元关系，记为 $\sim$. 对于任意 $(x, y) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}$, 若 $(x, y) \in \mathcal{T}$, 则称 x 和 y 有关系，记为 $x \sim y$; 若 $(x, y) \notin \mathcal{T}$, 则称 x 和 y 没有关系，记为 $x \nsim y$.

注 设 $\mathcal{T}$ 定义了二元关系 $\sim$, 则对于任意的 $x, y \in \mathcal{S}$, 或者它们有关系，或者没有关系，两者必居其一且只居其一.

定义 3　集合 $\mathcal{S}$ 的一个二元关系 " $\sim$ " 称为 $\mathcal{S}$ 的一个等价关系，如果满足：

(1) 反身性：对于任意的 $x \in \mathcal{S}$, 有 $x \sim x$;

(2) 对称性：若 $x \sim y$, 则 $y \sim x$;

(3) 传递性：若 $x \sim y$, $y \sim z$, 则 $x \sim z$.

命题 1　集合 $\mathcal{S}$ 的一个分类决定 $\mathcal{S}$ 的一个等价关系.

证明 设 $\{\mathcal{S}_i \mid i \in I\}$ 是 $\mathcal{S}$ 的一个分类，定义关系 $x \sim y :\Longleftrightarrow x$ 与 y 在同一个类中. 下面证明此为等价关系.

(1) 对于任意的 $x \in \mathcal{S}$, 存在 $i \in I$ 使得 $x \in \mathcal{S}_i$. x 和 x 在一类中，所以即 $x \sim x$;

(2) 若 $x \sim y$, 即 x 和 y 在同一类中，所以 y 与 x 属于同一类，因此 $y \sim x$;

(3) 若 $x \sim y, y \sim z$, 即 x 和 y 属于同一类， y 和 z 属于同一类. 所以 x, y, z 属于同一类. 故 $x \sim y$.

命题 2 集合 $\mathcal{S}$ 的一个等价关系 "$\sim$" 决定 $\mathcal{S}$ 的一个分类.

证明 对任意的 $x \in S$, 令 $\mathcal{S}_x = \{y \mid y \in \mathcal{S}, y \sim x\}$. 下面验证此为 $\mathcal{S}$ 的一个分类.

(1) 对于任意的 $x \in \mathcal{S}$, 由于 $x \sim x$, 即 $x \in \mathcal{S}_x$. 故 $\mathcal{S}$ 中任一元素必属于某一类，即 $\mathcal{S} = \bigcup \mathcal{S}_x$.

(2) 对于任意两类 $\mathcal{S}_y$, $\mathcal{S}_z$, 或者 $\mathcal{S}_y \bigcap \mathcal{S}_z = \emptyset$, 或者 $\mathcal{S}_y = \mathcal{S}_z$. 事实上，设 $x \in \mathcal{S}_y \bigcap \mathcal{S}_z$, 则按定义有 $x \sim y$, $x \sim z$. 由对称性知 $y \sim x$, $x \sim z$, 再由传递性，可得 $y \sim z$. 故 $y \in \mathcal{S}_z$. 进一步，对于任意的 $a \in \mathcal{S}_y$, 有 $a \sim y, y \sim z$. 因此 $a \sim z$. 即 $\mathcal{S}_y \subseteq \mathcal{S}_z$. 同理 $\mathcal{S}_z \subseteq \mathcal{S}_y$. 故 $\mathcal{S}_y = \mathcal{S}_z$.

注 对 $\mathcal{S}$ 进行等价分类意义在于：

(1) 将对 $\mathcal{S}$ 的研究化为对 $\mathcal{S}_i$ 的研究，化大为小；

(2) 如果能够找到等价关系 "$\sim$" 的特征，掌握 $\mathcal{S}_i$ 的元素所共有而其它类的元素所没有的性质，可以将对类 $\mathcal{S}_i$ 的元素性质的研究，化为对 $\mathcal{S}_i$ 的某个元素的研究；

(3) 在 (2) 的前提下，考察各类之间的关系或者运算，只要考虑其中的代表元即可.

所以，我们的研究点在于：

(1) 寻找 $\mathcal{S}$ 中的元素在等价关系的不变量；如果不变量能够区分不同的类，则称此不变量为完全不变量；

(2) 寻找各类的代表元；

(3) 研究类的个数.

这样通过各类的代表元研究每一类，进而研究整个 $\mathcal{S}$.

§2. $F^{m\times n}$ 中的相抵关系

《高等代数》课程中的等价关系有： $F^{m\times n}$ 中的相抵关系； $F^{n\times n}$ 中的相似关系； $\mathbb{R}^{n\times n}$ 中的正交相似关系； $F^{n\times n}$ 中全体对称矩阵的合同关系； F 上所有线性空间的同构关系；线性空间 V 的向量组的等价关系.

命题 3 设 $A, B \in F^{m\times n}$, 则

A 相抵于 B

$:\Leftrightarrow$ A 可以经过一系列行和列的初等变换化为 B

$\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵 $P \in F^{m\times m}$, $Q \in F^{n\times n}$, 使得 $A = PBQ$

$\Leftrightarrow A, B$ 可分别经过一系列行和列的初等变换化为同一个 $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 其中 I_r 是 r 阶单位阵

$\Leftrightarrow \operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B)$.

所以, 在 $F^{m\times n}$ 中的相抵关系是等价关系. 矩阵的秩是相抵关系的完全不变量. 每一类的代表元是 $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. 按照等价关系可分为 l 类, 这里 $l = \min\{m, n\}+1$.

§3. 应用 1: 矩阵的分解

题 1 (1) 设 $A \in F^{m\times n}$, 且 $\operatorname{rank}(A) = r$. 求证: $A = A_1 + A_2 + \cdots + A_r$, 这里 $\operatorname{rank}(A_i) = 1$, $1 \le i \le r$;

(2) 设 $A, B \in F^{m\times n}$, 且 $\operatorname{rank}(A) = r$, $\operatorname{rank}(B) = 1$. 求证: 存在可逆阵 $P_1, P_2, \cdots, P_r \in F^{m\times m}$ 和可逆阵 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_r \in F^{n\times n}$, 使得 $A = P_1BQ_1 + P_2BQ_2 + \cdots + P_rBQ_r$.

题 2 设 $A \in F^{m\times n}$, $\operatorname{rank}(A) = r$. 求证:

(1) 存在可逆阵 $P \in F^{m\times m}$, 使得 $PA = \begin{pmatrix} M \\ 0 \end{pmatrix}$, 其中 $M \in F^{r\times n}$ 且 $\operatorname{rank}(M) = r$;

(2) 存在可逆阵 $Q \in F^{n\times n}$, 使得 $AQ = \begin{pmatrix} N & 0 \end{pmatrix}$, 其中 $N \in F^{m\times r}$ 且 $\operatorname{rank}(N) = r$;

(3) A 相似于 $\begin{pmatrix} M \\ 0 \end{pmatrix}$, 其中 $M \in F^{r\times n}$ 且 $\operatorname{rank}(M) = r$;

(4) A 相似于 $\begin{pmatrix} N & 0 \end{pmatrix}$, 其中 $N \in F^{m\times r}$ 且 $\operatorname{rank}(N) = r$.

题 3

(1) 设 $M \in F^{r\times n}$, $\operatorname{rank}(M) = r$. 求证: 存在可逆阵 Q, 使得 $MQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \end{pmatrix}$;

(2) 设 $N \in F^{m\times r}$, $\operatorname{rank}(N) = r$. 求证: 存在可逆阵 P, 使得 $PN = \begin{pmatrix} I_r \\ 0 \end{pmatrix}$;

(3) 设 $A \in F^{r\times n}$, $\operatorname{rank}(A) = r$. 求证: 存在 $B \in F^{n\times r}$ 且 $\operatorname{rank}(B) = r$, 使得 $AB = I_r$;

(4) 设 $A \in F^{n\times r}$, $\operatorname{rank}(A) = r$. 求证: 存在 $C \in F^{r\times n}$ 且 $\operatorname{rank}(B) = r$, 使得 $CA = I_r$;

(5) 问上面的 B, C 是否唯一? 什么情况下唯一?

题 4 (1) 设 $A \in F^{m\times n}$. 则 $\operatorname{rank}(A) = r \Longleftrightarrow$ 存在 $B \in F^{m\times r}$, $C \in F^{r\times m}$ 且 $\operatorname{rank}(B) = \operatorname{rank}(C) = r$, 使得 $A = BC$.

(2) 问 (1) 中的 (B,C) 是否基本唯一. 即, 如果存在 $B_1\in F^{m\times r}$, $C_1\in F^{r\times m}$ 且 $\mathrm{rank}(B_1)=\mathrm{rank}(C_1)=r$, 使得 $A=B_1C_1$, 是否存在可逆阵 $P\in F^{r\times r}$, 使得 $B_1=BP$, $C_1=P^{-1}C$?

(3) 设 $A\in F^{m\times n}$. 则 $\mathrm{rank}(A)=r \Longleftrightarrow$ 存在 r 个线性无关的 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\in F^{1\times n}$, r 个线性无关的 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r\in F^{m\times 1}$, 使得 $A=\beta_1\alpha_1+\beta_2\alpha_2+\cdots+\beta_r\alpha_r$;

(4) 若存在另外 r 个线性无关的 $\alpha_1',\alpha_2',\cdots,\ \alpha_r'\in F^{1\times n}$, r 个线性无关的 $\beta_1',\beta_2',\cdots,\ \beta_r'\in F^{m\times 1}$, 使得 $A=\beta_1'\alpha_1'+\beta_2'\alpha_2'+\cdots+\beta_r'\alpha_r'$. 求证：向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 与 $\alpha_1',\alpha_2',\cdots,\alpha_r'$ 等价；向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 与 $\beta_1',\beta_2',\cdots,\beta_r'$ 等价；

题 5 设 $A\in F^{n\times n}$. 求证：

(1) $A=BC=DE$, 这里 $B^2=B$, $E^2=E$, C,D 是 n 阶可逆阵;

(2) A 可经过一系列行的 (或列的) 初等变换化为幂等阵;

(3) A 可经过一系列行的 (或列的) 初等变换化为对称阵.

题 6

(1) 设 $A\in F^{n\times n}$, $\mathrm{rank}(A)=r$. 求证: 存在 $B\in F^{n\times n}$ 且 $\mathrm{rank}(B)=n-r$, 使得 $AB=0$;

(2) 设 $A\in F^{n\times n}$, $\mathrm{rank}(A)=r$. 求证: 存在 $B\in F^{n\times n}$ 且 $\mathrm{rank}(B)=n-r$, 使得 $AB=BA=0$;

(3) 设 $A,B\in F^{n\times n}$, $\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B)\le n$. 求证: 存在可逆阵 $C\in F^{n\times n}$, 使得 $ACB=0$;

(4) 设 $A\in F^{n\times n}$. 求证：存在 $B\in F^{n\times n}$, 使得 $ABA=A, BAB=B$;

(5) (4) 中的解是否唯一？什么条件下唯一？

(6) $A\in F^{n\times n}$, $\mathrm{rank}(A)=r$. 求证：存在 $B\in F^{n\times n}$ 且 $\mathrm{rank}(B)=n-r$, 使得 $A+B$ 为可逆阵;

(7) $A\in F^{n\times n}$, $\mathrm{rank}(A)=r$. 求证：存在 $B,C\in F^{n\times n}$ 且 $\mathrm{rank}(B)=\mathrm{rank}(C)=r$, 使得 $AB=CA$.

§4. 应用 2: 矩阵的秩的命题的证明

题 7 设 $A\in F^{m\times n}, B\in F^{n\times l}$, 则 $\mathrm{rank}(AB)\le \min\{\mathrm{rank}(A),\mathrm{rank}(B)\}$.

证明提要 设 $\mathrm{rank}(A)=r$. $A=P\begin{pmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q$, $\mathrm{rank}(AB)=\mathrm{rank}\left(\begin{pmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}QB\right)\le r$. 设 $\mathrm{rank}(B)=s$. $B=P_1\begin{pmatrix} I_s & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q_1$, $\mathrm{rank}(AB)$

$= \operatorname{rank}(AP_1 \begin{pmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) \leq s$.

题 8 $\operatorname{rank}(A+B) \leq \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$.

证明提要 设 $\operatorname{rank}(A) = r, \operatorname{rank}(B) = s$. 故存在可逆矩阵 P_1, P_2, Q_1, Q_2, 使得 $A = P_1 C Q_1$, $B = P_2 D Q_2$, 这里 $C = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. 则 $A+B = (P_1, P_2) \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}$. 所以 $\operatorname{rank}(A+B) \leq \operatorname{rank}(\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}) \leq \operatorname{rank}(\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}) = \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$.

题 9 $\operatorname{rank}(AB) \geq \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B) - n$, 这里 $A \in F^{m\times n}, B \in F^{n \times l}$.

证明提要 设 $\operatorname{rank}(A) = r$, $\operatorname{rank}(B) = s$, 则存在可逆矩阵 P, P_1, Q, Q_1, 使得 $A = P \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q$, $B = P_1 \begin{pmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q_1$. 所以 $\operatorname{rank}(AB) = \operatorname{rank}(\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} QP_1 \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix})$.

设 $QP_1 = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$, 这里 $C_{11} \in F^{r \times s}$. 则有 $\operatorname{rank}(AB) \geq \operatorname{rank} (\begin{pmatrix} C_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) \geq \operatorname{rank}(QP_1) - (n-r) - (n-s) = r+s-n$.

题 10 $\operatorname{rank}(ABC) \geq \operatorname{rank}(AB) + \operatorname{rank}(BC) - \operatorname{rank}(B)$.

证明提要 设 $\operatorname{rank}(B) = s$, 则存在可逆矩阵 P, Q, 使得 $B = P \begin{pmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q$. 所以 $ABC = (AP \begin{pmatrix} I_s \\ 0 \end{pmatrix})(\begin{pmatrix} E_s & 0 \end{pmatrix} QC)$. 故 $\operatorname{rank}(ABC) \geq \operatorname{rank}(AP \begin{pmatrix} I_s \\ 0 \end{pmatrix}) + \operatorname{rank}(\begin{pmatrix} I_s & 0 \end{pmatrix} QC) - s = \operatorname{rank}(AP \begin{pmatrix} E_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q) + \operatorname{rank}(P \begin{pmatrix} E_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} QC) - s = \operatorname{rank}(AB) + \operatorname{rank}(BC) - \operatorname{rank}(B)$.

§5. 矩阵的相抵与线性映射

命题 4 设 V 是数域 F 上 n 维线性空间, $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 和 $\xi_1', \xi_2', \cdots, \xi_n'$ 是 V 的基且

$$(\xi_1', \xi_2', \cdots, \xi_n') = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) P.$$

设 W 是 m 维线性空间，$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m$ 和 $\eta_1',\eta_2',\cdots,\eta_m'$ 是 W 的基且

$$(\eta_1',\eta_2',\cdots,\eta_m')=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m)Q.$$

设 φ 是 V 到 W 的线性映射，且

$$\varphi(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m)A_{m\times n},$$

$$\varphi(\xi_1',\xi_2',\cdots,\xi_n')=(\eta_1',\eta_2',\cdots,\eta_m')B_{m\times n}.$$

则 $B=Q^{-1}AP$, 即 A 相抵于 B.

命题 5 设 $A,B\in F^{m\times n}$, A 相抵于 B. 即存在 m 阶可逆阵 Q 和 n 阶可逆阵 P 使得 $B=Q^{-1}AP$. 设 V 是数域 F 上 n 维线性空间，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 是 V 的基. 设 W 是 m 维线性空间，$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m$ 是 W 的基. 设 φ 是 V 到 W 的线性映射，且

$$\varphi(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m)A_{m\times n}.$$

令 $\xi_1',\xi_2',\cdots,\xi_n'$ 是 V 的另一组基，使得

$$(\xi_1',\xi_2',\cdots,\xi_n')=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)P.$$

$\eta_1',\eta_2',\cdots,\eta_m'$ 是 W 的另一组基，使得

$$(\eta_1',\eta_2',\cdots,\eta_m')=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m)Q.$$

则

$$\varphi(\xi_1',\xi_2',\cdots,\xi_n')=(\eta_1',\eta_2',\cdots,\eta_m')B_{m\times n}.$$

注 设 $A,B\in F^{m\times n}$. 上面命题 4 和命题 5 说明，A 相抵于 B 的充分必要条件是 A 和 B 是 n 维线性空间到 m 维线性空间的同一个线性映射在不同基下的矩阵. 特别地，设 $A,B\in F^{n\times n}$, A 相似于 B 的充分必要条件是 A 和 B 是 n 维线性空间的同一个线性变换在不同基下的矩阵.

由于 A 总相抵于标准型 $\begin{pmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$. 所以我们有

命题 6 设 φ 是 n 维线性空间 V 到 m 维线性空间 W 的线性映射. 则存在 V 的一组基 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$, W 的一组基 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m$, 使得

$$\varphi(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m)\begin{pmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

题 11　设 φ 是 n 维线性空间 V 到 m 维线性空间 W 的线性映射. 求证:

(1) $\dim\mathrm{Im}(\varphi)+\dim\mathrm{Ker}(\varphi)=n$;

(2) φ 是单的线性映射 $\Leftrightarrow r=n$;

(3) φ 是满的线性映射 $\Leftrightarrow r=m$.

证明提要 (1) 在 V 的一组基 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$, W 的一组基 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m$, 使得

$$\varphi(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m)\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

证明 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r$ 是 $\mathrm{Im}(\varphi)$ 的一组基, $\xi_{r+1},\xi_{r+2},\cdots,\xi_n$ 是 $\mathrm{Ker}(\varphi)$ 的一组基.

(2) 和 (3) 是显然的.

题 12　设 V,U 是有限维线性空间, $\varphi:V\to U$ 是线性映射. 证明:

(1) 存在有限维线性空间 W 与满的线性映射 $\psi:V\to W$, 单的线性映射 $\sigma:W\to U$, 使得 $\varphi=\sigma\psi$;

(2) (1) 中的分解在同构意义下是唯一的. 即: 若存在另一个有限维线性空间 W_1 与满的线性映射 $\psi_1:V\to W_1$, 单的线性映射 $\sigma_1:W_1\to U$, 使得 $\varphi=\sigma_1\psi_1$, 则存在线性空间同构 $\theta:W\to W_1$, 使得 $\theta\varphi=\varphi_1$, $\sigma_1\theta=\sigma$.

(1) **证明提要 (法一)** 令 $W=\mathrm{Im}\varphi$, $\psi:V\to W$, $\alpha\mapsto\varphi(\alpha)$, σ 是嵌入映射, 则满足要求.

证明提要 (法二) 设 V 是 n 维线性空间, $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 是 V 的一个基; 设 U 是 m 维线性空间, $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m$ 是 U 的一个基. 令

$$\varphi(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m)A,$$

其中 A 为 $m\times n$ 矩阵. 设 $r(A)=r$. 则 $A=CB$, 其中 C 为 $m\times r$ 矩阵, B 为 $r\times n$ 矩阵, 且 $r(B)=r(C)=r$. 令 W 是 r 维线性空间, $\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_r$ 是 W 的一个基, $\psi:V\to W$, $\sigma:W\to U$ 是线性映射满足

$$\psi(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)=(\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_r)B,$$

$$\sigma(\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_r)=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m)C.$$

则因为 $A=CB$, 有 $\varphi=\sigma\psi$. 因为 B 行满秩, 所以 ψ 是满射; 因为 C 列满秩, 所以 σ 是单射.

(2) **证明提要 (法一)** 因为 $\varphi=\sigma\psi=\sigma_1\psi_1$ 和 σ,σ_1 单射, 知 $\mathrm{Ker}\psi=\mathrm{Ker}\varphi=\mathrm{Ker}\psi_1$. 设 $\alpha_{r+1},\alpha_{r+2},\cdots,\alpha_n$ 是 $\mathrm{Ker}\psi$ 的基, 扩为 V 的基 α_1, $\cdots$,

$\alpha_r, \alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_n$. 则 $\psi(\alpha_1), \psi(\alpha_2), \cdots, \psi(\alpha_r)$ 是 $\mathrm{Im}\psi$ 的基，即是 W 的基；$\psi_1(\alpha_1), \psi_1(\alpha_2), \cdots, \psi_1(\alpha_r)$ 是 $\mathrm{Im}\psi_1$ 的基，即是 W_1 的基．令 $\theta: W \to W_1$, $\sum_{i=1}^r a_i\psi(\alpha_i) \mapsto \sum_{i=1}^r a_i\psi_1(\alpha_i)$, 则 θ 是向量空间的同构. 直接验证得 $\theta\varphi = \varphi_1$, $\sigma_1\theta = \sigma$.

证明提要（法二） 设 V 是 n 维线性空间，$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 是 V 的一个基；设 U 是 m 维线性空间，$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m$ 是 U 的一个基．设 W 是 r 维线性空间，$\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_r$ 是 W 的一个基；设 U 是 s 维线性空间，$\zeta_1', \eta_2', \cdots, \eta_s'$ 是 W_1 的一个基．令

$$\varphi(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m)A,$$

$$\psi(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) = (\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_r)B,$$

$$\sigma(\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_r) = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m)C,$$

$$\psi_1(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) = (\zeta_1', \zeta_2', \cdots, \zeta_s')H,$$

$$\sigma_1(\zeta_1', \zeta_2', \cdots, \zeta_s') = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m)G,$$

其中 A 为 $m \times n$ 矩阵，B 为 $r \times n$ 矩阵，C 为 $m \times r$ 矩阵，H 为 $s \times n$ 矩阵，G 为 $m \times s$ 矩阵．根据同构对应，有 $A = CB = GH$. 因为 ψ, ψ_1 为满射，σ, σ_1 为单射，所以 $r(C) = r(B) = r$, $r(G) = r(H) = s$. 这样，存在 $r \times m$ 矩阵 C_1 使得 $C_1C = I_r$, 存在 $s \times m$ 矩阵 G_1 使得 $G_1G = I_s$, 存在 $n \times r$ 矩阵 B_1 使得 $BB_1 = I_r$.

由于

$$s = r(G) \geq r(C_1GH) = r(C_1CB) = r(B) = r$$

$$= r(B) \geq r(G_1CB) = r(G_1GH) = r(H) = s,$$

有 $r = s$. 令 $F = G_1C$, 则 F 是 r 阶方阵，并且 $H = FB$. 又因为 $r(F) \geq r(FB) = r(H) = r$, 所以 F 是 r 阶可逆阵．另一方面，$CB = GH = GFB$, 右乘 B_1, 得到 $GF = C$. 令 $\theta: W \to W_1$ 是线性映射满足

$$\theta(\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_r) = (\zeta_1', \zeta_2', \cdots, \zeta_r')F,$$

则 θ 是可逆映射且 $\theta\varphi = \varphi_1$, $\sigma_1\theta = \sigma$.

题 13 设 φ 是 n 维线性空间 V 到 m 维线性空间 W 的线性映射．求证：$V = V_1 \oplus V_2$, 其中 $V_1 \cong \mathrm{Im}\varphi$, $V_2 = \mathrm{Ker}\varphi$.

题 14 设 φ 是 n 维线性空间 V 的线性变换．求证：$\varphi = \psi\theta$, 其中 ψ, θ 是线性变换，$\psi^2 = \psi$ 且 θ 是可逆线性变换.