



从矩阵的相抵谈起

林亚南

等价关系与等价分类

$F^{m \times n}$ 中的相抵关系

应用1: 矩阵的分解

应用2: 矩阵的秩的命题的证明

矩阵的相抵与线性映射

从矩阵的相抵谈起

林亚南

厦门大学 数学科学学院
2007年12月莆田学院



目录

从矩阵的相抵谈起

林亚南

等价关系与等价分类

$F^{m \times n}$ 中的相抵关系

应用1: 矩阵的分解

应用2: 矩阵的秩的命题的证明

矩阵的相抵与线性映射

设 F 是一个数域, $A, B \in F^{m \times n}$. 称 A 相抵于 B , 如果 A 可以经过一系列行的和列的初等变换化为 A , 等价地, 如果存在可逆矩阵 $P \in F^{m \times m}$, $Q \in F^{n \times n}$, 使得 $A = PBQ$.

- 1 等价关系与等价分类
- 2 $F^{m \times n}$ 中的相抵关系
- 3 应用1: 矩阵的分解
- 4 应用2: 矩阵的秩的命题的证明
- 5 矩阵的相抵与线性映射



从矩阵的相抵谈起

林亚南

等价关系与等价分类

$F^{m \times n}$ 中的相抵关系

应用1: 矩阵的分解

应用2: 矩阵的秩的命题的证明

矩阵的相抵与线性映射

1 等价关系与等价分类

2 $F^{m \times n}$ 中的相抵关系

3 应用1: 矩阵的分解

4 应用2: 矩阵的秩的命题的证明

5 矩阵的相抵与线性映射



等价关系与等价分类

从矩阵的相抵谈起

林亚南

等价关系与等价分类

$F^{m \times n}$ 中的相抵关系

应用1: 矩阵的分解

应用2: 矩阵的秩的命题的证明

矩阵的相抵与线性映射

定义1 给定集合 \mathcal{S} , 设集合 $\{\mathcal{S}_i | i \in I\}$, I 为有限或无限集, 是集合 \mathcal{S} 的子集族, 若满足:

$$(1) \mathcal{S} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{S}_i;$$

$$(2) \mathcal{S}_i \cap \mathcal{S}_j = \emptyset (i \neq j, i, j \in I).$$

则称 $\{\mathcal{S}_i | i \in I\}$ 是 \mathcal{S} 的一个分类, \mathcal{S}_i 称为 \mathcal{S} 的一个类.



从矩阵的相抵谈起

林亚南

等价关系与等价分类

$F^{m \times n}$ 中的相抵关系

应用1: 矩阵的分解

应用2: 矩阵的秩的命题的证明

矩阵的相抵与线性映射

定义2 设 S 是一个集合, T 是 $S \times S$ 的子集. 则我们称 T 定义了 S 的一个二元关系, 记为 \sim . 对于任意 $(x, y) \in S \times S$, 若 $(x, y) \in T$, 则称 x 和 y 有关系, 记为 $x \sim y$; 若 $(x, y) \notin T$, 则称 x 和 y 没有关系, 记为 $x \not\sim y$.

定义3 集合 S 的一个二元关系“ \sim ”称为 S 的一个等价关系, 如果满足:

- (1) 反身性: 对于任意的 $x \in S$, 有 $x \sim x$;
- (2) 对称性: 若 $x \sim y$, 则 $y \sim x$;
- (3) 传递性: 若 $x \sim y, y \sim z$, 则 $x \sim z$.



从矩阵的相抵谈起

林亚南

等价关系与等价分类

$F^{m \times n}$ 中的相抵关系

应用1: 矩阵的分解

应用2: 矩阵的秩的命题的证明

矩阵的相抵与线性映射

命题1 集合 S 的一个分类决定 S 的一个等价关系.

证明 设 $\{\mathcal{S}_i \mid i \in I\}$ 是 S 的一个分类, 定义关系 $x \sim y : \iff x$ 与 y 在同一个类中. 下面证明此为等价关系.

(1) 对于任意的 $x \in S$, 存在 $i \in I$ 使得 $x \in \mathcal{S}_i$. x 和 x 在一类中, 所以即 $x \sim x$;

(2) 若 $x \sim y$, 即 x 和 y 在同一类中, 所以 y 与 x 属于同一类, 因此 $y \sim x$;

(3) 若 $x \sim y, y \sim z$, 即 x 和 y 属于同一类, y 和 z 属于同一类. 所以 x, y, z 属于同一类. 故 $x \sim y$.



从矩阵的相抵谈起

林亚南

等价关系与等价分类

$F^{m \times n}$ 中的相抵关系

应用1: 矩阵的分解

应用2: 矩阵的秩的命题的证明

矩阵的相抵与线性映射

命题1 集合 S 的一个分类决定 S 的一个等价关系.

证明 设 $\{\mathcal{S}_i \mid i \in I\}$ 是 S 的一个分类, 定义关系 $x \sim y : \iff x$ 与 y 在同一个类中. 下面证明此为等价关系.

(1) 对于任意的 $x \in S$, 存在 $i \in I$ 使得 $x \in \mathcal{S}_i$. x 和 x 在一类中, 所以即 $x \sim x$;

(2) 若 $x \sim y$, 即 x 和 y 在同一类中, 所以 y 与 x 属于同一类, 因此 $y \sim x$;

(3) 若 $x \sim y, y \sim z$, 即 x 和 y 属于同一类, y 和 z 属于同一类. 所以 x, y, z 属于同一类. 故 $x \sim y$.



从矩阵的相抵谈起

林亚南

等价关系与等价分类

$F^{m \times n}$ 中的相抵关系

应用1: 矩阵的分解

应用2: 矩阵的秩的命题的证明

矩阵的相抵与线性映射

命题1 集合 S 的一个分类决定 S 的一个等价关系.

证明 设 $\{\mathcal{S}_i \mid i \in I\}$ 是 S 的一个分类, 定义关系 $x \sim y : \iff x$ 与 y 在同一个类中. 下面证明此为等价关系.

(1) 对于任意的 $x \in S$, 存在 $i \in I$ 使得 $x \in \mathcal{S}_i$. x 和 x 在一类中, 所以即 $x \sim x$;

(2) 若 $x \sim y$, 即 x 和 y 在同一类中, 所以 y 与 x 属于同一类, 因此 $y \sim x$;

(3) 若 $x \sim y, y \sim z$, 即 x 和 y 属于同一类, y 和 z 属于同一类. 所以 x, y, z 属于同一类. 故 $x \sim y$.



从矩阵的相抵谈起

林亚南

等价关系与等价分类

$F^{m \times n}$ 中的相抵关系

应用1: 矩阵的分解

应用2: 矩阵的秩的命题的证明

矩阵的相抵与线性映射

命题1 集合 S 的一个分类决定 S 的一个等价关系.

证明 设 $\{\mathcal{S}_i \mid i \in I\}$ 是 S 的一个分类, 定义关系 $x \sim y : \iff x$ 与 y 在同一个类中. 下面证明此为等价关系.

(1) 对于任意的 $x \in S$, 存在 $i \in I$ 使得 $x \in \mathcal{S}_i$. x 和 x 在一类中, 所以即 $x \sim x$;

(2) 若 $x \sim y$, 即 x 和 y 在同一类中, 所以 y 与 x 属于同一类, 因此 $y \sim x$;

(3) 若 $x \sim y, y \sim z$, 即 x 和 y 属于同一类, y 和 z 属于同一类. 所以 x, y, z 属于同一类. 故 $x \sim y$.



从矩阵的相抵谈起

林亚南

等价关系与等价分类

$F^{m \times n}$ 中的相抵关系

应用1: 矩阵的分解

应用2: 矩阵的秩的命题的证明

矩阵的相抵与线性映射

命题1 集合 S 的一个分类决定 S 的一个等价关系.

证明 设 $\{\mathcal{S}_i \mid i \in I\}$ 是 S 的一个分类, 定义关系 $x \sim y : \iff x$ 与 y 在同一个类中. 下面证明此为等价关系.

(1) 对于任意的 $x \in S$, 存在 $i \in I$ 使得 $x \in \mathcal{S}_i$. x 和 x 在一类中, 所以即 $x \sim x$;

(2) 若 $x \sim y$, 即 x 和 y 在同一类中, 所以 y 与 x 属于同一类, 因此 $y \sim x$;

(3) 若 $x \sim y, y \sim z$, 即 x 和 y 属于同一类, y 和 z 属于同一类. 所以 x, y, z 属于同一类. 故 $x \sim y$.



从矩阵的相抵谈起

林亚南

等价关系与等价分类

$F^{m \times n}$ 中的相抵关系

应用1: 矩阵的分解

应用2: 矩阵的秩的命题的证明

矩阵的相抵与线性映射

命题2 集合 S 的一个等价关系“ \sim ”决定 S 的一个分类.

证明 对任意的 $x \in S$, 令 $\mathcal{S}_x = \{y \mid y \in S, y \sim x\}$. 下面验证此为 S 的一个分类.

(1) 对于任意的 $x \in S$, 由于 $x \sim x$, 即 $x \in \mathcal{S}_x$. 故 S 中任一元素必属于某一类, 即 $S = \bigcup \mathcal{S}_x$.

(2) 对于任意两类 $\mathcal{S}_y, \mathcal{S}_z$, 或者 $\mathcal{S}_y \cap \mathcal{S}_z = \emptyset$, 或者 $\mathcal{S}_y = \mathcal{S}_z$. 事实上, 设 $x \in \mathcal{S}_y \cap \mathcal{S}_z$, 则按定义有 $x \sim y, x \sim z$. 由对称性知 $y \sim x, x \sim z$, 再由传递性, 可得 $y \sim z$. 故 $y \in \mathcal{S}_z$. 进一步, 对于任意的 $a \in \mathcal{S}_y$, 有 $a \sim y, y \sim z$. 因此 $a \sim z$. 即 $\mathcal{S}_y \subseteq \mathcal{S}_z$. 同理 $\mathcal{S}_z \subseteq \mathcal{S}_y$. 故 $\mathcal{S}_y = \mathcal{S}_z$.



从矩阵的相抵谈起

林亚南

等价关系与等价分类

$F^{m \times n}$ 中的相抵关系

应用1: 矩阵的分解

应用2: 矩阵的秩的命题的证明

矩阵的相抵与线性映射

命题2 集合 S 的一个等价关系“ \sim ”决定 S 的一个分类.

证明 对任意的 $x \in S$, 令 $\mathcal{S}_x = \{y \mid y \in S, y \sim x\}$. 下面验证此为 S 的一个分类.

(1) 对于任意的 $x \in S$, 由于 $x \sim x$, 即 $x \in \mathcal{S}_x$. 故 S 中任一元素必属于某一类, 即 $S = \bigcup \mathcal{S}_x$.

(2) 对于任意两类 $\mathcal{S}_y, \mathcal{S}_z$, 或者 $\mathcal{S}_y \cap \mathcal{S}_z = \emptyset$, 或者 $\mathcal{S}_y = \mathcal{S}_z$. 事实上, 设 $x \in \mathcal{S}_y \cap \mathcal{S}_z$, 则按定义有 $x \sim y, x \sim z$. 由对称性知 $y \sim x, x \sim z$, 再由传递性, 可得 $y \sim z$. 故 $y \in \mathcal{S}_z$. 进一步, 对于任意的 $a \in \mathcal{S}_y$, 有 $a \sim y, y \sim z$. 因此 $a \sim z$. 即 $\mathcal{S}_y \subseteq \mathcal{S}_z$. 同理 $\mathcal{S}_z \subseteq \mathcal{S}_y$. 故 $\mathcal{S}_y = \mathcal{S}_z$.



从矩阵的相抵谈起

林亚南

等价关系与等价分类

$F^{m \times n}$ 中的相抵关系

应用1: 矩阵的分解

应用2: 矩阵的秩的命题的证明

矩阵的相抵与线性映射

命题2 集合 S 的一个等价关系“ \sim ”决定 S 的一个分类.

证明 对任意的 $x \in S$, 令 $\mathcal{S}_x = \{y \mid y \in S, y \sim x\}$. 下面验证此为 S 的一个分类.

(1) 对于任意的 $x \in S$, 由于 $x \sim x$, 即 $x \in \mathcal{S}_x$. 故 S 中任一元素必属于某一类, 即 $S = \bigcup \mathcal{S}_x$.

(2) 对于任意两类 $\mathcal{S}_y, \mathcal{S}_z$, 或者 $\mathcal{S}_y \cap \mathcal{S}_z = \emptyset$, 或者 $\mathcal{S}_y = \mathcal{S}_z$. 事实上, 设 $x \in \mathcal{S}_y \cap \mathcal{S}_z$, 则按定义有 $x \sim y, x \sim z$. 由对称性知 $y \sim x, x \sim z$, 再由传递性, 可得 $y \sim z$. 故 $y \in \mathcal{S}_z$. 进一步, 对于任意的 $a \in \mathcal{S}_y$, 有 $a \sim y, y \sim z$. 因此 $a \sim z$. 即 $\mathcal{S}_y \subseteq \mathcal{S}_z$. 同理 $\mathcal{S}_z \subseteq \mathcal{S}_y$. 故 $\mathcal{S}_y = \mathcal{S}_z$.



从矩阵的相抵谈起

林亚南

等价关系与等价分类

$F^{m \times n}$ 中的相抵关系

应用1: 矩阵的分解

应用2: 矩阵的秩的命题的证明

矩阵的相抵与线性映射

命题2 集合 S 的一个等价关系“ \sim ”决定 S 的一个分类.

证明 对任意的 $x \in S$, 令 $\mathcal{S}_x = \{y \mid y \in S, y \sim x\}$. 下面验证此为 S 的一个分类.

(1) 对于任意的 $x \in S$, 由于 $x \sim x$, 即 $x \in \mathcal{S}_x$. 故 S 中任一元素必属于某一类, 即 $S = \bigcup \mathcal{S}_x$.

(2) 对于任意两类 $\mathcal{S}_y, \mathcal{S}_z$, 或者 $\mathcal{S}_y \cap \mathcal{S}_z = \emptyset$, 或者 $\mathcal{S}_y = \mathcal{S}_z$. 事实上, 设 $x \in \mathcal{S}_y \cap \mathcal{S}_z$, 则按定义有 $x \sim y, x \sim z$. 由对称性知 $y \sim x, x \sim z$, 再由传递性, 可得 $y \sim z$. 故 $y \in \mathcal{S}_z$. 进一步, 对于任意的 $a \in \mathcal{S}_y$, 有 $a \sim y, y \sim z$. 因此 $a \sim z$. 即 $\mathcal{S}_y \subseteq \mathcal{S}_z$. 同理 $\mathcal{S}_z \subseteq \mathcal{S}_y$. 故 $\mathcal{S}_y = \mathcal{S}_z$.



从矩阵的相抵谈起

林亚南

等价关系与等价分类

$F^{m \times n}$ 中的相抵关系

应用1: 矩阵的分解

应用2: 矩阵的秩的命题的证明

矩阵的相抵与线性映射

1 等价关系与等价分类

2 $F^{m \times n}$ 中的相抵关系

3 应用1: 矩阵的分解

4 应用2: 矩阵的秩的命题的证明

5 矩阵的相抵与线性映射



$F^{m \times n}$ 中的相抵关系

从矩阵的相抵谈起

林亚南

等价关系与等价分类

$F^{m \times n}$ 中的相抵关系

应用1: 矩阵的分解

应用2: 矩阵的秩的命题的证明

矩阵的相抵与线性映射

《高等代数》课程中的等价关系有:

$F^{m \times n}$ 中的相抵关系;

$F^{n \times n}$ 中的相似关系;

$\mathbb{R}^{n \times n}$ 中的正交相似关系;

$F^{n \times n}$ 中全体对称矩阵的合同关系;

F 上所有线性空间的同构关系;

线性空间 V 的向量组的等价关系.



$F^{m \times n}$ 中的相抵关系

从矩阵的相抵谈起

林亚南

等价关系与等价分类

$F^{m \times n}$ 中的相抵关系

应用1: 矩阵的分解

应用2: 矩阵的秩的命题的证明

矩阵的相抵与线性映射

《高等代数》课程中的等价关系有:

$F^{m \times n}$ 中的相抵关系;

$F^{n \times n}$ 中的相似关系;

$\mathbb{R}^{n \times n}$ 中的正交相似关系;

$F^{n \times n}$ 中全体对称矩阵的合同关系;

F 上所有线性空间的同构关系;

线性空间 V 的向量组的等价关系.



$F^{m \times n}$ 中的相抵关系

从矩阵的相抵谈起

林亚南

等价关系与等价分类

$F^{m \times n}$ 中的相抵关系

应用1: 矩阵的分解

应用2: 矩阵的秩的命题的证明

矩阵的相抵与线性映射

《高等代数》课程中的等价关系有:

- $F^{m \times n}$ 中的相抵关系;
- $F^{n \times n}$ 中的相似关系;
- $\mathbb{R}^{n \times n}$ 中的正交相似关系;
- $F^{n \times n}$ 中全体对称矩阵的合同关系;
- F 上所有线性空间的同构关系;
- 线性空间 V 的向量组的等价关系.



$F^{m \times n}$ 中的相抵关系

从矩阵的相抵谈起

林亚南

等价关系与等价分类

$F^{m \times n}$ 中的相抵关系

应用1: 矩阵的分解

应用2: 矩阵的秩的命题的证明

矩阵的相抵与线性映射

《高等代数》课程中的等价关系有:

$F^{m \times n}$ 中的相抵关系;

$F^{n \times n}$ 中的相似关系;

$\mathbb{R}^{n \times n}$ 中的正交相似关系;

$F^{n \times n}$ 中全体对称矩阵的合同关系;

F 上所有线性空间的同构关系;

线性空间 V 的向量组的等价关系.



$F^{m \times n}$ 中的相抵关系

从矩阵的相抵谈起

林亚南

等价关系与等价分类

$F^{m \times n}$ 中的相抵关系

应用1: 矩阵的分解

应用2: 矩阵的秩的命题的证明

矩阵的相抵与线性映射

《高等代数》课程中的等价关系有:

$F^{m \times n}$ 中的相抵关系;

$F^{n \times n}$ 中的相似关系;

$\mathbb{R}^{n \times n}$ 中的正交相似关系;

$F^{n \times n}$ 中全体对称矩阵的合同关系;

F 上所有线性空间的同构关系;

线性空间 V 的向量组的等价关系.



$F^{m \times n}$ 中的相抵关系

从矩阵的相抵谈起

林亚南

等价关系与等价分类

$F^{m \times n}$ 中的相抵关系

应用1: 矩阵的分解

应用2: 矩阵的秩的命题的证明

矩阵的相抵与线性映射

《高等代数》课程中的等价关系有：
 $F^{m \times n}$ 中的相抵关系；
 $F^{n \times n}$ 中的相似关系；
 $\mathbb{R}^{n \times n}$ 中的正交相似关系；
 $F^{n \times n}$ 中全体对称矩阵的合同关系；
 F 上所有线性空间的同构关系；
线性空间 V 的向量组的等价关系。



$F^{m \times n}$ 中的相抵关系

从矩阵的相抵谈起

林亚南

等价关系与等价分类

$F^{m \times n}$ 中的相抵关系

应用1: 矩阵的分解

应用2: 矩阵的秩的命题的证明

矩阵的相抵与线性映射

《高等代数》课程中的等价关系有：
 $F^{m \times n}$ 中的相抵关系；
 $F^{n \times n}$ 中的相似关系；
 $\mathbb{R}^{n \times n}$ 中的正交相似关系；
 $F^{n \times n}$ 中全体对称矩阵的合同关系；
 F 上所有线性空间的同构关系；
线性空间 V 的向量组的等价关系。



从矩阵的相抵谈起

林亚南

等价关系与等价分类

$F^{m \times n}$ 中的相抵关系

应用1: 矩阵的分解

应用2: 矩阵的秩的命题的证明

矩阵的相抵与线性映射

命题3 设 $A, B \in F^{m \times n}$, 则 A 相抵于 B

$\Leftrightarrow A$ 可以经过一系列行和列的初等变换化为 B

\Leftrightarrow 存在可逆矩阵 $P \in F^{m \times m}$, $Q \in F^{n \times n}$, 使得 $A = PBQ$

$\Leftrightarrow A, B$ 可分别经过一系列行和列的初等变换化为同一个 $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 其中 I_r 是 r 阶单位阵

$\Leftrightarrow \text{rank}(A) = \text{rank}(B)$.



从矩阵的相抵谈起

林亚南

等价关系与等价分类

$F^{m \times n}$ 中的相抵关系

应用1: 矩阵的分解

应用2: 矩阵的秩的命题的证明

矩阵的相抵与线性映射

命题3 设 $A, B \in F^{m \times n}$, 则 A 相抵于 B

$\Leftrightarrow A$ 可以经过一系列行和列的初等变换化为 B

\Leftrightarrow 存在可逆矩阵 $P \in F^{m \times m}$, $Q \in F^{n \times n}$, 使得 $A = PBQ$

$\Leftrightarrow A, B$ 可分别经过一系列行和列的初等变换化为同一个 $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 其中 I_r 是 r 阶单位阵

$\Leftrightarrow \text{rank}(A) = \text{rank}(B)$.



从矩阵的相抵谈起

林亚南

等价关系与等价分类

$F^{m \times n}$ 中的相抵关系

应用1: 矩阵的分解

应用2: 矩阵的秩的命题的证明

矩阵的相抵与线性映射

命题3 设 $A, B \in F^{m \times n}$, 则 A 相抵于 B

$\Leftrightarrow A$ 可以经过一系列行和列的初等变换化为 B

\Leftrightarrow 存在可逆矩阵 $P \in F^{m \times m}$, $Q \in F^{n \times n}$, 使得 $A = PBQ$

$\Leftrightarrow A, B$ 可分别经过一系列行和列的初等变换化为同一个 $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 其中 I_r 是 r 阶单位阵

$\Leftrightarrow \text{rank}(A) = \text{rank}(B)$.



从矩阵的相抵谈起

林亚南

等价关系与等价分类

$F^{m \times n}$ 中的相抵关系

应用1: 矩阵的分解

应用2: 矩阵的秩的命题的证明

矩阵的相抵与线性映射

命题3 设 $A, B \in F^{m \times n}$, 则 A 相抵于 B

$\Leftrightarrow A$ 可以经过一系列行和列的初等变换化为 B

\Leftrightarrow 存在可逆矩阵 $P \in F^{m \times m}$, $Q \in F^{n \times n}$, 使得 $A = PBQ$

$\Leftrightarrow A, B$ 可分别经过一系列行和列的初等变换化为同一个 $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 其中 I_r 是 r 阶单位阵

$\Leftrightarrow \text{rank}(A) = \text{rank}(B)$.



从矩阵的相抵谈起

林亚南

等价关系与等价分类

$F^{m \times n}$ 中的相抵关系

应用1: 矩阵的分解

应用2: 矩阵的秩的命题的证明

矩阵的相抵与线性映射

命题3 设 $A, B \in F^{m \times n}$, 则 A 相抵于 B

$\Leftrightarrow A$ 可以经过一系列行和列的初等变换化为 B

\Leftrightarrow 存在可逆矩阵 $P \in F^{m \times m}$, $Q \in F^{n \times n}$, 使得 $A = PBQ$

$\Leftrightarrow A, B$ 可分别经过一系列行和列的初等变换化为同一个 $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 其中 I_r 是 r 阶单位阵

$\Leftrightarrow \text{rank}(A) = \text{rank}(B)$.



从矩阵的相抵谈起

林亚南

等价关系与等价分类

$F^{m \times n}$ 中的相抵关系

应用1: 矩阵的分解

应用2: 矩阵的秩的命题的证明

矩阵的相抵与线性映射

所以, 在 $F^{m \times n}$ 中的相抵关系是等价关系. 矩阵的秩是相抵关系的完全不变量. 每一类的代表元是 $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. 按照等价关系可分为 l 类, 这里 $l = \min\{m, n\} + 1$.



从矩阵的相抵谈起

林亚南

等价关系与等价分类

$F^{m \times n}$ 中的相抵关系

应用1: 矩阵的分解

应用2: 矩阵的秩的命题的证明

矩阵的相抵与线性映射

1 等价关系与等价分类

2 $F^{m \times n}$ 中的相抵关系

3 应用1: 矩阵的分解

4 应用2: 矩阵的秩的命题的证明

5 矩阵的相抵与线性映射



应用1:矩阵的分解

从矩阵的相抵谈起

林亚南

等价关系与等价分类

$F^{m \times n}$ 中的相抵关系

应用1:矩阵的分解

应用2: 矩阵的秩的命题的证明

矩阵的相抵与线性映射

题1 (1) 设 $A \in F^{m \times n}$, 且 $\text{rank}(A) = r$. 求证:

$$A = A_1 + A_2 + \cdots + A_r,$$

这里 $\text{rank}(A_i) = 1, 1 \leq i \leq r$.

(2) 设 $A, B \in F^{m \times n}$, 且 $\text{rank}(A) = r, \text{rank}(B) = 1$. 求证:
存在可逆阵 $P_1, P_2, \cdots, P_r \in F^{m \times m}$ 和可逆阵 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_r \in F^{n \times n}$, 使得

$$A = P_1 B Q_1 + P_2 B Q_2 + \cdots + P_r B Q_r.$$



应用1:矩阵的分解

从矩阵的相抵谈起

林亚南

等价关系与等价分类

$F^{m \times n}$ 中的相抵关系

应用1:矩阵的分解

应用2: 矩阵的秩的命题的证明

矩阵的相抵与线性映射

题1 (1) 设 $A \in F^{m \times n}$, 且 $\text{rank}(A) = r$. 求证:

$$A = A_1 + A_2 + \cdots + A_r,$$

这里 $\text{rank}(A_i) = 1, 1 \leq i \leq r$.

(2) 设 $A, B \in F^{m \times n}$, 且 $\text{rank}(A) = r, \text{rank}(B) = 1$. 求证:
存在可逆阵 $P_1, P_2, \cdots, P_r \in F^{m \times m}$ 和可逆阵 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_r \in F^{n \times n}$, 使得

$$A = P_1 B Q_1 + P_2 B Q_2 + \cdots + P_r B Q_r.$$



从矩阵的相抵谈起

林亚南

等价关系与等价分类

$F^{m \times n}$ 中的相抵关系

应用1: 矩阵的分解

应用2: 矩阵的秩的命题的证明

矩阵的相抵与线性映射

题2 设 $A \in F^{m \times n}$, $\text{rank}(A) = r$. 求证:

- (1) 存在可逆阵 $P \in F^{m \times m}$, 使得 $PA = \begin{pmatrix} M \\ 0 \end{pmatrix}$, 其中 $M \in F^{r \times n}$ 且 $\text{rank}(M) = r$;
- (2) 存在可逆阵 $Q \in F^{n \times n}$, 使得 $AQ = \begin{pmatrix} N & 0 \end{pmatrix}$, 其中 $N \in F^{m \times r}$ 且 $\text{rank}(N) = r$;
- (3) A 相似于 $\begin{pmatrix} M \\ 0 \end{pmatrix}$, 其中 $M \in F^{r \times n}$ 且 $\text{rank}(M) = r$;
- (4) A 相似于 $\begin{pmatrix} N & 0 \end{pmatrix}$, 其中 $N \in F^{m \times r}$ 且 $\text{rank}(N) = r$.



从矩阵的相抵谈起

林亚南

等价关系与等价分类

$F^{m \times n}$ 中的相抵关系

应用1: 矩阵的分解

应用2: 矩阵的秩的命题的证明

矩阵的相抵与线性映射

题2 设 $A \in F^{m \times n}$, $\text{rank}(A) = r$. 求证:

- (1) 存在可逆阵 $P \in F^{m \times m}$, 使得 $PA = \begin{pmatrix} M \\ 0 \end{pmatrix}$, 其中 $M \in F^{r \times n}$ 且 $\text{rank}(M) = r$;
- (2) 存在可逆阵 $Q \in F^{n \times n}$, 使得 $AQ = \begin{pmatrix} N & 0 \end{pmatrix}$, 其中 $N \in F^{m \times r}$ 且 $\text{rank}(N) = r$;
- (3) A 相似于 $\begin{pmatrix} M \\ 0 \end{pmatrix}$, 其中 $M \in F^{r \times n}$ 且 $\text{rank}(M) = r$;
- (4) A 相似于 $\begin{pmatrix} N & 0 \end{pmatrix}$, 其中 $N \in F^{m \times r}$ 且 $\text{rank}(N) = r$.



从矩阵的相抵谈起

林亚南

等价关系与等价分类

$F^{m \times n}$ 中的相抵关系

应用1: 矩阵的分解

应用2: 矩阵的秩的命题的证明

矩阵的相抵与线性映射

题2 设 $A \in F^{m \times n}$, $\text{rank}(A) = r$. 求证:

- (1) 存在可逆阵 $P \in F^{m \times m}$, 使得 $PA = \begin{pmatrix} M \\ 0 \end{pmatrix}$, 其中 $M \in F^{r \times n}$ 且 $\text{rank}(M) = r$;
- (2) 存在可逆阵 $Q \in F^{n \times n}$, 使得 $AQ = \begin{pmatrix} N & 0 \end{pmatrix}$, 其中 $N \in F^{m \times r}$ 且 $\text{rank}(N) = r$;
- (3) A 相似于 $\begin{pmatrix} M \\ 0 \end{pmatrix}$, 其中 $M \in F^{r \times n}$ 且 $\text{rank}(M) = r$;
- (4) A 相似于 $\begin{pmatrix} N & 0 \end{pmatrix}$, 其中 $N \in F^{m \times r}$ 且 $\text{rank}(N) = r$.



从矩阵的相抵谈起

林亚南

等价关系与等价分类

$F^{m \times n}$ 中的相抵关系

应用1: 矩阵的分解

应用2: 矩阵的秩的命题的证明

矩阵的相抵与线性映射

题2 设 $A \in F^{m \times n}$, $\text{rank}(A) = r$. 求证:

- (1) 存在可逆阵 $P \in F^{m \times m}$, 使得 $PA = \begin{pmatrix} M \\ 0 \end{pmatrix}$, 其中 $M \in F^{r \times n}$ 且 $\text{rank}(M) = r$;
- (2) 存在可逆阵 $Q \in F^{n \times n}$, 使得 $AQ = \begin{pmatrix} N & 0 \end{pmatrix}$, 其中 $N \in F^{m \times r}$ 且 $\text{rank}(N) = r$;
- (3) A 相似于 $\begin{pmatrix} M \\ 0 \end{pmatrix}$, 其中 $M \in F^{r \times n}$ 且 $\text{rank}(M) = r$;
- (4) A 相似于 $\begin{pmatrix} N & 0 \end{pmatrix}$, 其中 $N \in F^{m \times r}$ 且 $\text{rank}(N) = r$.



从矩阵的相抵谈起

林亚南

等价关系与等价分类

$F^{m \times n}$ 中的相抵关系

应用1: 矩阵的分解

应用2: 矩阵的秩的命题的证明

矩阵的相抵与线性映射

题3 (1) 设 $M \in F^{r \times n}$, $\text{rank}(M) = r$. 求证: 存在可逆阵 Q , 使得

$$MQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \end{pmatrix};$$

(2) 设 $N \in F^{m \times r}$, $\text{rank}(N) = r$. 求证: 存在可逆阵 P , 使得

$$PN = \begin{pmatrix} I_r \\ 0 \end{pmatrix};$$



从矩阵的相抵谈起

林亚南

等价关系与等价分类

$F^{m \times n}$ 中的相抵关系

应用1: 矩阵的分解

应用2: 矩阵的秩的命题的证明

矩阵的相抵与线性映射

题3 (1) 设 $M \in F^{r \times n}$, $\text{rank}(M) = r$. 求证: 存在可逆阵 Q , 使得

$$MQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \end{pmatrix};$$

(2) 设 $N \in F^{m \times r}$, $\text{rank}(N) = r$. 求证: 存在可逆阵 P , 使得

$$PN = \begin{pmatrix} I_r \\ 0 \end{pmatrix};$$



从矩阵的相抵谈起

林亚南

等价关系与等价分类

$F^{m \times n}$ 中的相抵关系

应用1: 矩阵的分解

应用2: 矩阵的秩的命题的证明

矩阵的相抵与线性映射

(3) 设 $A \in F^{r \times n}$, $\text{rank}(A) = r$. 求证: 存在 $B \in F^{n \times r}$
且 $\text{rank}(B) = r$, 使得

$$AB = I_r;$$

(4) 设 $A \in F^{n \times r}$, $\text{rank}(A) = r$. 求证: 存在 $C \in F^{r \times n}$
且 $\text{rank}(C) = r$, 使得

$$CA = I_r;$$

(5) 问上面的 B, C 是否唯一?



从矩阵的相抵谈起

林亚南

等价关系与等价分类

$F^m \times n$ 中的相抵关系

应用1: 矩阵的分解

应用2: 矩阵的秩的命题的证明

矩阵的相抵与线性映射

(3) 设 $A \in F^{r \times n}$, $\text{rank}(A) = r$. 求证: 存在 $B \in F^{n \times r}$
且 $\text{rank}(B) = r$, 使得

$$AB = I_r;$$

(4) 设 $A \in F^{n \times r}$, $\text{rank}(A) = r$. 求证: 存在 $C \in F^{r \times n}$
且 $\text{rank}(C) = r$, 使得

$$CA = I_r;$$

(5) 问上面的 B, C 是否唯一?



从矩阵的相抵谈起

林亚南

等价关系与等价分类

$F^{m \times n}$ 中的相抵关系

应用1: 矩阵的分解

应用2: 矩阵的秩的命题的证明

矩阵的相抵与线性映射

(3) 设 $A \in F^{r \times n}$, $\text{rank}(A) = r$. 求证: 存在 $B \in F^{n \times r}$
且 $\text{rank}(B) = r$, 使得

$$AB = I_r;$$

(4) 设 $A \in F^{n \times r}$, $\text{rank}(A) = r$. 求证: 存在 $C \in F^{r \times n}$
且 $\text{rank}(C) = r$, 使得

$$CA = I_r;$$

(5) 问上面的 B, C 是否唯一?



从矩阵的相抵谈起

林亚南

等价关系与等价分类

$F^{m \times n}$ 中的相抵关系

应用1: 矩阵的分解

应用2: 矩阵的秩的命题的证明

矩阵的相抵与线性映射

题4 (1) 设 $A \in F^{m \times n}$. 则 $\text{rank}(A) = r \iff$ 存在 $B \in F^{m \times r}, C \in F^{r \times m}$ 且 $\text{rank}(B) = \text{rank}(C) = r$, 使得

$$A = BC;$$

(2) 问(1)中的 (B, C) 是否基本唯一. 即, 如果存在 $B_1 \in F^{m \times r}, C_1 \in F^{r \times m}$ 且 $\text{rank}(B_1) = \text{rank}(C_1) = r$, 使得 $A = B_1 C_1$, 是否存在可逆 $P \in F^{r \times r}$, 使得

$$B_1 = BP, \quad C_1 = P^{-1}C?$$



从矩阵的相抵谈起

林亚南

等价关系与等价分类

$F^{m \times n}$ 中的相抵关系

应用1: 矩阵的分解

应用2: 矩阵的秩的命题的证明

矩阵的相抵与线性映射

题4 (1) 设 $A \in F^{m \times n}$. 则 $\text{rank}(A) = r \iff$ 存在 $B \in F^{m \times r}, C \in F^{r \times m}$ 且 $\text{rank}(B) = \text{rank}(C) = r$, 使得

$$A = BC;$$

(2) 问(1)中的 (B, C) 是否基本唯一. 即, 如果存在 $B_1 \in F^{m \times r}, C_1 \in F^{r \times m}$ 且 $\text{rank}(B_1) = \text{rank}(C_1) = r$, 使得 $A = B_1 C_1$, 是否存在可逆 $P \in F^{r \times r}$, 使得

$$B_1 = BP, \quad C_1 = P^{-1}C?$$



从矩阵的相抵谈起

林亚南

等价关系与等价分类

$F^{m \times n}$ 中的相抵关系

应用1: 矩阵的分解

应用2: 矩阵的秩的命题的证明

矩阵的相抵与线性映射

(3) 设 $A \in F^{m \times n}$. 则 $\text{rank}(A) = r \iff$ 存在 r 个线性无关的 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \in F^{1 \times n}$, r 个线性无关的 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r \in F^{m \times 1}$, 使得

$$A = \beta_1 \alpha_1 + \beta_2 \alpha_2 + \dots + \beta_r \alpha_r;$$

(4) 若存在另外 r 个线性无关的 $\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_r \in F^{1 \times n}$, r 个线性无关的 $\beta'_1, \beta'_2, \dots, \beta'_r \in F^{m \times 1}$, 使得

$$A = \beta'_1 \alpha'_1 + \beta'_2 \alpha'_2 + \dots + \beta'_r \alpha'_r$$

求证: 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 与 $\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_r$ 等价; 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ 与 $\beta'_1, \beta'_2, \dots, \beta'_r$ 等价;



从矩阵的相抵谈起

林亚南

等价关系与等价分类

$F^{m \times n}$ 中的相抵关系

应用1: 矩阵的分解

应用2: 矩阵的秩的命题的证明

矩阵的相抵与线性映射

(3) 设 $A \in F^{m \times n}$. 则 $\text{rank}(A) = r \iff$ 存在 r 个线性无关的 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \in F^{1 \times n}$, r 个线性无关的 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r \in F^{m \times 1}$, 使得

$$A = \beta_1 \alpha_1 + \beta_2 \alpha_2 + \dots + \beta_r \alpha_r;$$

(4) 若存在另外 r 个线性无关的 $\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_r \in F^{1 \times n}$, r 个线性无关的 $\beta'_1, \beta'_2, \dots, \beta'_r \in F^{m \times 1}$, 使得

$$A = \beta'_1 \alpha'_1 + \beta'_2 \alpha'_2 + \dots + \beta'_r \alpha'_r$$

求证: 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 与 $\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_r$ 等价; 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ 与 $\beta'_1, \beta'_2, \dots, \beta'_r$ 等价;



从矩阵的相抵谈起

林亚南

等价关系与等价分类

$F^m \times n$ 中的相抵关系

应用1: 矩阵的分解

应用2: 矩阵的秩的命题的证明

矩阵的相抵与线性映射

题5 设 $A \in F^{n \times n}$. 求证:

- (1) $A = BC = DE$, 这里 $B^2 = B$, $E^2 = E$, C, D 是 n 阶可逆阵;
- (2) A 可经过一系列的行的(或列的)初等变换化为幂等阵;
- (3) A 可经过一系列的行的(或列的)初等变换化为对称阵.



从矩阵的相抵谈起

林亚南

等价关系与等价分类

$F^{m \times n}$ 中的相抵关系

应用1: 矩阵的分解

应用2: 矩阵的秩的命题的证明

矩阵的相抵与线性映射

题5 设 $A \in F^{n \times n}$. 求证:

(1) $A = BC = DE$, 这里 $B^2 = B$, $E^2 = E$, C, D 是 n 阶可逆阵;

(2) A 可经过一系列行的(或列的)初等变换化为幂等阵;

(3) A 可经过一系列行的(或列的)初等变换化为对称阵.



从矩阵的相抵谈起

林亚南

等价关系与等价分类

$F^{m \times n}$ 中的相抵关系

应用1: 矩阵的分解

应用2: 矩阵的秩的命题的证明

矩阵的相抵与线性映射

题5 设 $A \in F^{n \times n}$. 求证:

- (1) $A = BC = DE$, 这里 $B^2 = B$, $E^2 = E$, C, D 是 n 阶可逆阵;
- (2) A 可经过一系列的行的(或列的)初等变换化为幂等阵;
- (3) A 可经过一系列的行的(或列的)初等变换化为对称阵.



从矩阵的相抵谈起

林亚南

等价关系与等价分类

$F^{m \times n}$ 中的相抵关系

应用1: 矩阵的分解

应用2: 矩阵的秩的命题的证明

矩阵的相抵与线性映射

题6 (1) 设 $A \in F^{n \times n}$, $\text{rank}(A) = r$. 求证: 存在 $B \in F^{n \times n}$ 且 $\text{rank}(B) = n - r$, 使得 $AB = 0$;

(2) 设 $A \in F^{n \times n}$, $\text{rank}(A) = r$. 求证: 存在 $B \in F^{n \times n}$ 且 $\text{rank}(B) = n - r$, 使得 $AB = BA = 0$;

(3) 设 $A, B \in F^{n \times n}$, $\text{rank}(A) + \text{rank}(B) \leq n$. 求证: 存在可逆阵 $M \in F^{n \times n}$, 使得 $AMB = 0$;



从矩阵的相抵谈起

林亚南

等价关系与等价分类

$F^{m \times n}$ 中的相抵关系

应用1: 矩阵的分解

应用2: 矩阵的秩的命题的证明

矩阵的相抵与线性映射

题6 (1) 设 $A \in F^{n \times n}$, $\text{rank}(A) = r$. 求证: 存在 $B \in F^{n \times n}$ 且 $\text{rank}(B) = n - r$, 使得 $AB = 0$;

(2) 设 $A \in F^{n \times n}$, $\text{rank}(A) = r$. 求证: 存在 $B \in F^{n \times n}$ 且 $\text{rank}(B) = n - r$, 使得 $AB = BA = 0$;

(3) 设 $A, B \in F^{n \times n}$, $\text{rank}(A) + \text{rank}(B) \leq n$. 求证: 存在可逆阵 $M \in F^{n \times n}$, 使得 $AMB = 0$;



从矩阵的相抵谈起

林亚南

等价关系与等价分类

$F^{m \times n}$ 中的相抵关系

应用1: 矩阵的分解

应用2: 矩阵的秩的命题的证明

矩阵的相抵与线性映射

题6 (1) 设 $A \in F^{n \times n}$, $\text{rank}(A) = r$. 求证: 存在 $B \in F^{n \times n}$ 且 $\text{rank}(B) = n - r$, 使得 $AB = 0$;

(2) 设 $A \in F^{n \times n}$, $\text{rank}(A) = r$. 求证: 存在 $B \in F^{n \times n}$ 且 $\text{rank}(B) = n - r$, 使得 $AB = BA = 0$;

(3) 设 $A, B \in F^{n \times n}$, $\text{rank}(A) + \text{rank}(B) \leq n$. 求证: 存在可逆阵 $M \in F^{n \times n}$, 使得 $AMB = 0$;



从矩阵的相抵谈起

林亚南

等价关系与等价分类

$F^{m \times n}$ 中的相抵关系

应用1: 矩阵的分解

应用2: 矩阵的秩的命题的证明

矩阵的相抵与线性映射

(4) 设 $A \in F^{n \times n}$. 求解矩阵方程 $AXA = A$;

(5) (4)中的解是否唯一? 什么条件下唯一?

(6) $A \in F^{n \times n}$, $\text{rank}(A) = r$. 求证: 存在 $B \in F^{n \times n}$ 且 $\text{rank}(B) = n - r$, 使得 $A + B$ 为可逆阵;

(7) $A \in F^{n \times n}$, $\text{rank}(A) = r$. 求证: 存在 $B, C \in F^{n \times n}$ 且 $\text{rank}(B) = \text{rank}(C) = r$, 使得 $AB = CA$.



从矩阵的相抵谈起

林亚南

等价关系与等价分类

$F^{m \times n}$ 中的相抵关系

应用1: 矩阵的分解

应用2: 矩阵的秩的命题的证明

矩阵的相抵与线性映射

(4) 设 $A \in F^{n \times n}$. 求解矩阵方程 $AXA = A$;

(5) (4)中的解是否唯一? 什么条件下唯一?

(6) $A \in F^{n \times n}$, $\text{rank}(A) = r$. 求证: 存在 $B \in F^{n \times n}$ 且 $\text{rank}(B) = n - r$, 使得 $A + B$ 为可逆阵;

(7) $A \in F^{n \times n}$, $\text{rank}(A) = r$. 求证: 存在 $B, C \in F^{n \times n}$ 且 $\text{rank}(B) = \text{rank}(C) = r$, 使得 $AB = CA$.



从矩阵的相抵谈起

林亚南

等价关系与等价分类

$F^{m \times n}$ 中的相抵关系

应用1: 矩阵的分解

应用2: 矩阵的秩的命题的证明

矩阵的相抵与线性映射

(4) 设 $A \in F^{n \times n}$. 求解矩阵方程 $AXA = A$;

(5) (4)中的解是否唯一? 什么条件下唯一?

(6) $A \in F^{n \times n}$, $\text{rank}(A) = r$. 求证: 存在 $B \in F^{n \times n}$ 且 $\text{rank}(B) = n - r$, 使得 $A + B$ 为可逆阵;

(7) $A \in F^{n \times n}$, $\text{rank}(A) = r$. 求证: 存在 $B, C \in F^{n \times n}$ 且 $\text{rank}(B) = \text{rank}(C) = r$, 使得 $AB = CA$.



从矩阵的相抵谈起

林亚南

等价关系与等价分类

$F^{m \times n}$ 中的相抵关系

应用1: 矩阵的分解

应用2: 矩阵的秩的命题的证明

矩阵的相抵与线性映射

(4) 设 $A \in F^{n \times n}$. 求解矩阵方程 $AXA = A$;

(5) (4)中的解是否唯一? 什么条件下唯一?

(6) $A \in F^{n \times n}$, $\text{rank}(A) = r$. 求证: 存在 $B \in F^{n \times n}$ 且 $\text{rank}(B) = n - r$, 使得 $A + B$ 为可逆阵;

(7) $A \in F^{n \times n}$, $\text{rank}(A) = r$. 求证: 存在 $B, C \in F^{n \times n}$ 且 $\text{rank}(B) = \text{rank}(C) = r$, 使得 $AB = CA$.



从矩阵的相抵谈起

林亚南

等价关系与等价分类

$F^{m \times n}$ 中的相抵关系

应用1: 矩阵的分解

应用2: 矩阵的秩的命题的证明

矩阵的相抵与线性映射

- 1 等价关系与等价分类
- 2 $F^{m \times n}$ 中的相抵关系
- 3 应用1: 矩阵的分解
- 4 应用2: 矩阵的秩的命题的证明
- 5 矩阵的相抵与线性映射



应用2: 矩阵的秩的命题的证明

从矩阵的相抵谈起

林亚南

等价关系与等价分类

$F^{m \times n}$ 中的相抵关系

应用1: 矩阵的分解

应用2: 矩阵的秩的命题的证明

矩阵的相抵与线性映射

题7 设 $A \in F^{m \times n}$, $B \in F^{n \times l}$, 则
$$\text{rank}(AB) \leq \min\{\text{rank}(A), \text{rank}(B)\}.$$

题8 $\text{rank}(A + B) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B).$

题9 $\text{rank}(AB) \geq \text{rank}(A) + \text{rank}(B) - n,$
这里 $A \in F^{m \times n}$, $B \in F^{n \times l}.$

题10 $\text{rank}(ABC) \geq \text{rank}(AB) + \text{rank}(BC) - \text{rank}(B).$



从矩阵的相抵谈起

林亚南

等价关系与等价分类

$F^{m \times n}$ 中的相抵关系

应用1: 矩阵的分解

应用2: 矩阵的秩的命题的证明

矩阵的相抵与线性映射

- 1 等价关系与等价分类
- 2 $F^{m \times n}$ 中的相抵关系
- 3 应用1: 矩阵的分解
- 4 应用2: 矩阵的秩的命题的证明
- 5 矩阵的相抵与线性映射



矩阵的相抵与线性映射

从矩阵的相抵谈起

林亚南

等价关系与等价分类

$F^{m \times n}$ 中的相抵关系

应用1: 矩阵的分解

应用2: 矩阵的秩的命题的证明

矩阵的相抵与线性映射

命题4 设 V 是数域 F 上 n 维线性空间, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 和 $\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_n$ 是 V 的基且

$$(\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_n) = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)P.$$

设 W 是 m 维线性空间, $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$ 和 $\eta'_1, \eta'_2, \dots, \eta'_m$ 是 W 的基且

$$(\eta'_1, \eta'_2, \dots, \eta'_m) = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m)Q.$$

设 φ 是 V 到 W 的线性映射, 且

$$\varphi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m)A_{m \times n},$$

$$\varphi(\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_n) = (\eta'_1, \eta'_2, \dots, \eta'_m)B_{m \times n}.$$

则 $B = Q^{-1}AP$, 即 A 相抵于 B .



从矩阵的相抵谈起

林亚南

等价关系与等价分类

$F^{m \times n}$ 中的相抵关系

应用1: 矩阵的分解

应用2: 矩阵的秩的命题的证明

矩阵的相抵与线性映射

命题5 设 $A, B \in F^{m \times n}$, A 相抵于 B . 即存在 m 阶可逆阵 Q 和 n 阶可逆阵 P 使得 $B = Q^{-1}AP$. 设 V 是数域 F 上 n 维线性空间, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 是 V 的基. 设 W 是 m 维线性空间, $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$ 是 W 的基. 设 φ 是 V 到 W 的线性映射, 且

$$\varphi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m)A_{m \times n}.$$

令 $\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_n$ 是 V 的另一组基, 使得

$$(\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_n) = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)P.$$

$\eta'_1, \eta'_2, \dots, \eta'_m$ 是 W 的另一组基, 使得

$$(\eta'_1, \eta'_2, \dots, \eta'_m) = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m)Q.$$

则

$$\varphi(\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_n) = (\eta'_1, \eta'_2, \dots, \eta'_m)B_{m \times n}.$$



从矩阵的相抵谈起

林亚南

等价关系与等价分类

$F^{m \times n}$ 中的相抵关系

应用1: 矩阵的分解

应用2: 矩阵的秩的命题的证明

矩阵的相抵与线性映射

注 设 $A, B \in F^{m \times n}$. 上面命题4和命题5说明, A 相抵于 B 的充分必要条件是 A 和 B 是 n 维线性空间到 m 维线性空间的同一个线性映射在不同基下的矩阵.

特别地, 设 $A, B \in F^{n \times n}$, A 相似于 B 的充分必要条件是 A 和 B 是 n 维线性空间的同一个线性变换在不同基下的矩阵.



从矩阵的相抵谈起

林亚南

等价关系与等价分类

$F^m \times n$ 中的相抵关系

应用1: 矩阵的分解

应用2: 矩阵的秩的命题的证明

矩阵的相抵与线性映射

由于 A 总相抵于标准型 $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. 所以我们有

命题6 设 φ 是 n 维线性空间 V 到 m 维线性空间 W 的线性映射. 则存在 V 的一组基 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, W 的一组基 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$, 使得

$$\varphi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m) \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$



从矩阵的相抵谈起

林亚南

等价关系与等价分类

$F^{m \times n}$ 中的相抵关系

应用1: 矩阵的分解

应用2: 矩阵的秩的命题的证明

矩阵的相抵与线性映射

题11 设 φ 是 n 维线性空间 V 到 m 维线性空间 W 的线性映射. 求证:

(1) $\dim \text{Im}(\varphi) + \dim \text{Ker}(\varphi) = n$;

(2) φ 是单的线性映射 $\Leftrightarrow r = n$;

(3) φ 是满的线性映射 $\Leftrightarrow r = m$.



从矩阵的相抵谈起

林亚南

等价关系与等价分类

$F^{m \times n}$ 中的相抵关系

应用1: 矩阵的分解

应用2: 矩阵的秩的命题的证明

矩阵的相抵与线性映射

题11 设 φ 是 n 维线性空间 V 到 m 维线性空间 W 的线性映射. 求证:

$$(1) \dim \text{Im}(\varphi) + \dim \text{Ker}(\varphi) = n;$$

$$(2) \varphi \text{ 是单的线性映射} \Leftrightarrow r = n;$$

$$(3) \varphi \text{ 是满的线性映射} \Leftrightarrow r = m.$$



从矩阵的相抵谈起

林亚南

等价关系与等价分类

$F^{m \times n}$ 中的相抵关系

应用1: 矩阵的分解

应用2: 矩阵的秩的命题的证明

矩阵的相抵与线性映射

题11 设 φ 是 n 维线性空间 V 到 m 维线性空间 W 的线性映射. 求证:

(1) $\dim \text{Im}(\varphi) + \dim \text{Ker}(\varphi) = n$;

(2) φ 是单的线性映射 $\Leftrightarrow r = n$;

(3) φ 是满的线性映射 $\Leftrightarrow r = m$.



从矩阵的相抵谈起

林亚南

等价关系与等价分类

$F^{m \times n}$ 中的相抵关系

应用1: 矩阵的分解

应用2: 矩阵的秩的命题的证明

矩阵的相抵与线性映射

题12 设 V, U 是有限维线性空间, $\varphi : V \rightarrow U$ 是线性映射.
证明:

(1) 存在有限维线性空间 W 与满的线性映射 $\psi : V \rightarrow W$, 单的线性映射 $\sigma : W \rightarrow U$, 使得 $\varphi = \sigma\psi$;

(2) (1)中的分解在同构意义下是唯一的. 即: 若存在另一个有限维线性空间 W_1 与满的线性映射 $\psi_1 : V \rightarrow W_1$, 单的线性映射 $\sigma_1 : W_1 \rightarrow U$, 使得 $\varphi = \sigma_1\psi_1$, 则存在线性空间同构 $\theta : W \rightarrow W_1$, 使得 $\theta\varphi = \varphi_1$, $\sigma_1\theta = \sigma$.



从矩阵的相抵谈起

林亚南

等价关系与等价分类

$F^{m \times n}$ 中的相抵关系

应用1: 矩阵的分解

应用2: 矩阵的秩的命题的证明

矩阵的相抵与线性映射

题12 设 V, U 是有限维线性空间, $\varphi: V \rightarrow U$ 是线性映射.
证明:

(1) 存在有限维线性空间 W 与满的线性映射 $\psi: V \rightarrow W$, 单的线性映射 $\sigma: W \rightarrow U$, 使得 $\varphi = \sigma\psi$;

(2) (1)中的分解在同构意义下是唯一的. 即: 若存在另一个有限维线性空间 W_1 与满的线性映射 $\psi_1: V \rightarrow W_1$, 单的线性映射 $\sigma_1: W_1 \rightarrow U$, 使得 $\varphi = \sigma_1\psi_1$, 则存在线性空间同构 $\theta: W \rightarrow W_1$, 使得 $\theta\varphi = \varphi_1$, $\sigma_1\theta = \sigma$.



从矩阵的相抵谈起

林亚南

等价关系与等价分类

$F^{m \times n}$ 中的相抵关系

应用1: 矩阵的分解

应用2: 矩阵的秩的命题的证明

矩阵的相抵与线性映射

题13 设 φ 是 n 维线性空间 V 到 m 维线性空间 W 的线性映射. 求证: $V = V_1 \oplus V_2$, 其中 $V_1 \cong \text{Im}\varphi$, $V_2 = \text{Ker}\varphi$.

题14 设 φ 是 n 维线性空间 V 的线性变换. 求证: $\varphi = \psi\theta$, 其中 ψ, θ 是线性变换, $\psi^2 = \psi$ 且 θ 是可逆线性变换.



从矩阵的相抵谈起

林亚南

等价关系与等价分类

$F^{m \times n}$ 中的相抵关系

应用1: 矩阵的分解

应用2: 矩阵的秩的命题的证明

矩阵的相抵与线性映射

题13 设 φ 是 n 维线性空间 V 到 m 维线性空间 W 的线性映射. 求证: $V = V_1 \oplus V_2$, 其中 $V_1 \cong \text{Im}\varphi$, $V_2 = \text{Ker}\varphi$.

题14 设 φ 是 n 维线性空间 V 的线性变换. 求证: $\varphi = \psi\theta$, 其中 ψ, θ 是线性变换, $\psi^2 = \psi$ 且 θ 是可逆线性变换.



从矩阵的相抵谈起

林亚南

等价关系与等价分类

$F^{m \times n}$ 中的相抵关系

应用1: 矩阵的分解

应用2: 矩阵的秩的命题的证明

矩阵的相抵与线性映射

Thank you!