正交矩阵的正交相似标准型

林亚南

厦门大学数学系

ynlin@xmu.edu.cn

访问主页
标题页
第 1 页 共 100 页
返回
全屏显示
关闭
退出

⋆ §1.正交矩阵在正交相似下的标准型

设V是n维欧氏空间,$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$是$V$的一个标准正交基,$\varphi$是$V$的正交变换,由$\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)A$知$A$是正交矩阵

问题:能否存在一组标准正交基,使在此基下的矩阵A形式简单(标准型)?

问题:设A是正交矩阵,能否存在正交矩阵T,使得$T^{-1}AT = T'AT$的形式最简单(标准型)?

引理1. 设A为正交阵, $\lambda = a + ib \in$C为A的一个复特征根$(b \neq 0)$, $\mu = \alpha + i\beta$为其对应的特征向量,则$\alpha \perp \beta$且$|\alpha| = |\beta|$.

证明提要: 因为$A(\alpha + i\beta) = (a + ib)(\alpha + i\beta)$, $A\alpha = a\alpha - b\beta$, $A\beta = b\alpha + a\beta$. 所以

$$|\alpha|^2 = (\alpha, \alpha) = \alpha' A' A\alpha = a^2|\alpha|^2 + b^2|\beta|^2 - 2ab\alpha'\beta, \qquad (*)$$

$$|\beta|^2 = b^2|\alpha|^2 + a^2|\beta|^2 - 2ab\alpha'\beta. \ (**)$$

$(*) - (**)$, 得$(a^2 - b^2 - 1)(|\alpha|^2 - |\beta|^2) - 4ab\alpha'\beta \ \ (*1)$, 由于正交矩阵的特征根模长为1, 所以$a^2 + b^2 = 1 \ \ (*2)$.另外, $\alpha'\beta = \alpha' A' A\beta = (a^2 - b^2)\alpha'\beta + ab(|\alpha|^2 - |\beta|^2) \ \ (*3)$. 从$(*1), (*2), (*3)$, 可得

$$\begin{cases} (a^2 - b^2 - 1)(|\alpha|^2 - |\beta|^2) - 4ab\alpha'\beta = 0 \\ ab(|\alpha|^2 - |\beta|^2) + (a^2 - b^2 - 1)\alpha'\beta = 0 \end{cases}$$

视为关于$(|\alpha|^2 - |\beta|^2)$和$\alpha'\beta$的方程, 系数行列式不等于零, 所以方程只有零解. 故$(|\alpha|^2 - |\beta|^2) = 0, \alpha'\beta = 0$.

定理1. 设A是n阶正交矩阵, 则存在正交阵T, 使得

$$T^{-1}AT = \operatorname{diag}\left\{E_r, -E_s, \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} \cos\alpha_l & -\sin\alpha_l \\ \sin\alpha_l & \cos\alpha_l \end{pmatrix}\right\}.$$

证明提要: 对阶数做数学归纳. 当$n=1$时显然成立.设当阶数$\leq t$时命题成立. 当阶数为$t+1$时

(1). 若A有一个实根λ_0, 则取其单位特征向量X_1, 扩为R^{t+1}的标准正交基$X_1, X_2, \cdots, X_{t+1}$.

$$A(X_1, X_2, \cdots, X_{t+1}) = (X_1, X_2, \cdots, X_{t+1}) \begin{pmatrix} \lambda_0 & \beta \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}.$$

这里A_1是t阶方阵. 令$T_1 = (X_1, X_2, \cdots, X_{t+1})$, 则$T_1^{t+1} AT = \begin{pmatrix} \lambda_0 & \beta \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$. 记为$B$. 因为$T, A$均为正交阵, 所以$B'B = E$, 即$\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ \beta' & A_1' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 & \beta \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & E_t \end{pmatrix}$. 得到$\lambda_0\beta = 0$, 所以$\beta = 0$, $A_1'A_1 = E$. 由归纳假设知存在正交阵T_2, 使得

$$T_2^{-1} A_1 T_2 = \mathrm{diag}\{E_r, -E_s, \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} \cos\alpha_l & -\sin\alpha_l \\ \sin\alpha_l & \cos\alpha_l \end{pmatrix}\}.$$

令$T = T_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}$, 则$T$是正交阵且

$$T^{-1} AT = \mathrm{diag}\{\lambda_0, E_r, -E_s, \begin{pmatrix} cos\alpha_1 & -sin\alpha_1 \\ sin\alpha_1 & cos\alpha_1 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} \cos\alpha_l & -\sin\alpha_l \\ \sin\alpha_l & \cos\alpha_l \end{pmatrix}\}.$$

命题得证.

(2). 若A无实特征根, 令$\lambda = a + ib$是其特征根,$\alpha + i\beta$是对应的特征向量. 则根据引理$\alpha \perp \beta$, $|\alpha| = |\beta|$. 因为$|\lambda| = 1$, 可设$\lambda = cos\alpha + isin\alpha$. 取$\alpha, \beta$的单位化向量$X_1, X_2$, 则$X_1, X_2$是$\mathrm{R}^{t+1}$的标准正交组,扩为$\mathrm{R}^{t+1}$的标准正交基$X_1, X_2, \cdots, X_{t+1}$, 则

$$A(X_1, X_2, \cdots, X_{t+1}) = (X_1, X_2, \cdots, X_{t+1}) \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} & C \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}.$$

令$T_1 = (X_1, X_2, \cdots, X_{t+1})$. $T_1^{-1}AT_1 = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} & C \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$. 因为$T_1, A$均为正交阵, 所以$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} & 0 \\ C & A_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} & C \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ 0 & E_{t-1} \end{pmatrix}$. 故$C'C + A_2'A_2 = E_{t-1}$, $C = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = 0$. 所以$C = 0$, $A_2'A_2 = E$.

由归纳假设知存在正交阵T_2, 使得

$$T_2^{-1}A_2T_2=\mathrm{diag}\{E_r,-E_s,\begin{pmatrix}\cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1\\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}\cos\alpha_l & -\sin\alpha_l\\ \sin\alpha_l & \cos\alpha_l\end{pmatrix}\}.$$

令$T=T_1\begin{pmatrix}E_2 & 0\\ 0 & T_2\end{pmatrix}$, 则$T$是正交阵且$T^{-1}AT=$

$$\mathrm{diag}\{\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix},E_r,-E_s,\begin{pmatrix}\cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1\\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}\cos\alpha_l & -\sin\alpha_l\\ \sin\alpha_l & \cos\alpha_l\end{pmatrix}\}$$

命题成立.

定理2. 设$\mathcal{A}$是n维欧氏空间V上的正交变换, 则存在标准正交基, 使得$\mathcal{A}$在此基下的矩阵是

$$\mathrm{diag}\left\{E_r, -E_s, \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} \cos\alpha_l & -\sin\alpha_l \\ \sin\alpha_l & \cos\alpha_l \end{pmatrix}\right\}.$$

⋆ §2.应用I

例1.设A是正交矩阵,求证存在正交矩阵B,使$A=B^3$.

证明:$A=T^{-1}\mathrm{diag}\{-E_r,E_s,\begin{pmatrix}\cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1\\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}\cos\alpha_l & -\sin\alpha_l\\ \sin\alpha_l & \cos\alpha_l\end{pmatrix}\}T$

令$B=T^{-1}\mathrm{diag}\{-E_r,E_s,\begin{pmatrix}\cos\frac{\alpha_1}{3} & -\sin\frac{\alpha_1}{3}\\ \sin\frac{\alpha_1}{3} & \cos\frac{\alpha_1}{3}\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}\cos\frac{\alpha_l}{3} & -\sin\frac{\alpha_l}{3}\\ \sin\frac{\alpha_l}{3} & \cos\frac{\alpha_l}{3}\end{pmatrix}\}T$

则$A=S^3$.

例2.设A是正交矩阵,t是奇数,则存在正交矩阵B,使$A = B^t$.

例3.设A是正交矩阵且$|A| = 1$,则存在正交矩阵S,使$A = S^2$.

证明:$|A| = 1$所以r为偶数,注意到$\begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}$,

而$\begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}$是正交阵, 令$S = T^{-1}CT$,其中$C =$

$\mathrm{diag}\{\begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha_1}{3} & -\sin\frac{\alpha_1}{3} \\ \sin\frac{\alpha_1}{3} & \cos\frac{\alpha_1}{3} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha_l}{3} & -\sin\frac{\alpha_l}{3} \\ \sin\frac{\alpha_l}{3} & \cos\frac{\alpha_l}{3} \end{pmatrix}\}$

注意到$\begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$,故有$A = S^2$.

例4:设A是正交矩阵且$|A| = 1$,则对于任意偶数t,存在正交矩阵B,使$A = B^t$.

⋆ §3.应用II:镜面反射

设α是n维欧氏空间中长度为1的向量,定义线性变换

$$\varphi(\beta) = \beta - 2(\beta, \alpha)\alpha$$

则φ 是正交变换,称为镜像变换.

将α扩为V的标准正交基, $\alpha_1 = \alpha, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$,则

$$\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \begin{pmatrix} -1 & \\ & I_{n-1} \end{pmatrix}$$

命题1: 设n阶矩阵$M = I_n - 2vv'$,其中v是n维实向量且$v'v = 1$,则M是正交阵.称为镜像矩阵.

求证:欧氏空间中任一镜像变换φ在任一标准正交基下的矩阵是镜像矩阵.反之若线性交换φ在一组标准正交基下的矩阵是镜像矩阵，则φ是镜像交换.

证明: 设φ是镜像变换,所以存在V的另外一组标准正交基下的表示矩阵是$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = I_n - 2\alpha\alpha'$,其中$\alpha' = (1, 0, \cdots, 0)$

假定φ在V的另外一组标准正交基下的表示矩阵是M,则M和A正交相似,即存在正交矩阵P,使$M = PAP'$,所以$M = P(I_n - 2\alpha\alpha')P' = I_n - 2(P\alpha)(P\alpha)'$ 而$P\alpha$的长度为1 ,这就证明了第一个结论.

反之,设φ 在V 的标准正交基$e_1, e_2, \cdots, e_n$下的表示矩阵为$M = I_n - 2vv'$ 设$v = (b_1, b_2, \cdots, b_n)'$,令$x = b_1e_1 + b_2e_2 + \cdots + b_ne_n$. 对V 中的任意向量$y = y_1e_1 + y_2e_2 + \cdots + y_ne_n$,记$\beta = (y_1, y_2, \cdots, y_n)'$,则$M(\beta) = \beta - 2vv'\beta = \beta - 2(v, \beta)v$. 这就是$\varphi(y) = y - 2(x, y)x$. 注意到$x$ 的长度为1,故φ 是镜像变换.

例5:设β_1, β_2是n维欧氏空间中的两个长度相等的不同向量,求证:必存在镜像变换φ,使$\varphi(\beta_1) = \beta_2$.

证明:令$\alpha = \frac{\beta_1 - \beta_2}{\|\beta_1 - \beta_2\|}$, 定义$\varphi(\beta) = \beta - 2(\beta, \alpha)\alpha$.

例6:证明n 维欧氏空间中任一正交变换均可表示为不超过$n+1$ 个镜像变换之积.

证明(一): 对n 用归纳法.

当$n = 1$ 时正交变换φ 或是恒等变换,或是$\varphi(x) = -x$,后者已是镜像变换,而恒等变换是两个镜像变换之积,故结论成立.现假定结论对$n-1$ 成立.设V 是n 维欧氏空间, φ是V 上的正交变换.设$e_1, e_2, \cdots, e_n$是V 的一组标准正交基,因为$\|\varphi(e_1)\| = \|e_1\| = 1$,存在镜像变换ψ ,使$\psi\varphi(e_1) = e_1$, $\psi\varphi$ 也是正交变换, 于是$V_1 = e_1^{\perp}$是$\psi\varphi$ 的不变子空间(参见例9.12). 由归纳假设,$\psi\varphi = \psi_1\psi_2\cdots\psi_k, k \leq n$, ,每个ψ_i 是V_1 上的镜像变换. ψ_i可以扩张到V上,满足$\psi(e_1) = e_1$,不难验证得到的线性变换仍是镜像变换. 于是$\varphi = \psi^{-1}\psi_1\psi_2\cdots\psi_k$.故结论成立.

问题:例6的证明(一)过程表明n 维欧氏空间中任一正交变换均可表示为不超过$n+1$ 个镜像变换之积在理论上成立,但它具体形式如何没有给出.

证明概要(二): 由定理2只需考虑

$B=\mathrm{diag}\{E_r,-E_s,\begin{pmatrix}\cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1\\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}\cos\alpha_l & -\sin\alpha_l\\ \sin\alpha_l & \cos\alpha_l\end{pmatrix}\}$的情形,

因为$\begin{pmatrix}1 & \\ & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} & -1\\ -1 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & -1\\ -1 & \end{pmatrix}$,且$\begin{pmatrix} & -1\\ -1 & \end{pmatrix}=I_2-2\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$是镜像矩阵. 这样$2m$阶的单位阵可以表示为$2m$个镜像矩阵的乘积. 而恒等变换是两个镜像变换之积.

又$-E_s$可以表为s个镜像矩阵的乘积. 另一方面, $\begin{pmatrix}\cos\alpha_i & -\sin\alpha_i\\ \sin\alpha_i & \cos\alpha_i\end{pmatrix}$可表示为两个镜像矩阵的乘积. 事实上,

$$\begin{pmatrix}\cos\alpha_i & -\sin\alpha_i\\ \sin\alpha_i & \cos\alpha_i\end{pmatrix}=(I_2-\begin{pmatrix}\sin\alpha_i\\ -\cos\alpha_i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}sin\alpha_i\\ -\cos\alpha_i\end{pmatrix})(I_2-\begin{pmatrix}\sin\frac{\alpha_i}{2}\\ -\cos\frac{\alpha_i}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}sin\frac{\alpha_i}{2}\\ -\cos\frac{\alpha_i}{2}\end{pmatrix}).$$

推论:若1是偶重根时,可得n 维欧氏空间中任一正交变换均可表示为不超过n 个镜像变换之积.

问题:若1是奇重根,是否n 维欧氏空间中任一正交变换一定表示为$n+1$ 个镜像变换之积,镜像变换的个数是否可以少?
同样,若1是偶重根,是否n 维欧氏空间中任一正交变换一定表示为n 个镜像变换之积,镜像变换的个数是否可以少?

谢　谢!