



[Home Page](#)

[Title Page](#)



[Page 1 of 14](#)

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

2005 4 8

福建师范大学数学与计算机科学学院



# 关于正交矩阵群的有限子群

张圣贵

2006 年 12 月 2 日

Home Page

Title Page



Page 2 of 14

Go Back

Full Screen

Close

Quit



# 关于正交矩阵群的有限子群

- 一 正四面体的对称群
- 二 群作用的例子
- 三 Sylow定理的例子

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀](#) [▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 3 of 14

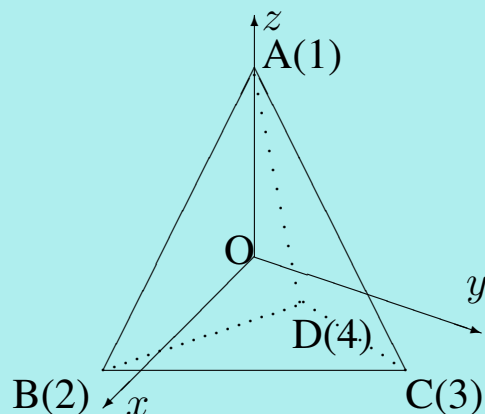
[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

# 一. 正四面体的对称群



例1 在上图正四面体中, 设 $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{AD} = \overline{BC} = \overline{BD} = \overline{CD} = 1$ , 选正四面体的重心 $O$ 为原点, 在 $\triangle OAC$ , 过 $O$ 作一直线 $\overline{OC'}$ 使得 $\overline{OC'} \perp \overline{OA}$ , 以 $\overline{OA}$ 为 $z$ -轴,  $\overline{OC'}$ 为 $y$ -轴, 向量积 $\overline{OC'} \times \overline{OA}$ 为 $x$ -轴. 设 $K, I, J$ 分别为 $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$ 的中点. 计算得,

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= \overline{OA} = (0, 0, \frac{\sqrt{6}}{4})^T, & \alpha_2 &= \overline{OB} = (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{12})^T, \\
 \alpha_3 &= \overline{OC} = (0, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{12})^T, & \alpha_4 &= \overline{OD} = (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{12})^T, \\
 \alpha_5 &= \overline{OI} = (0, \frac{1}{6}\sqrt{3}, \frac{1}{12}\sqrt{6})^T, & \alpha_6 &= \overline{OJ} = (-\frac{1}{4}, -\frac{1}{12}\sqrt{3}, \frac{1}{12}\sqrt{6})^T, \\
 \alpha_7 &= \overline{OK} = (\frac{1}{4}, -\frac{1}{12}\sqrt{3}, \frac{1}{12}\sqrt{6})^T, & \bar{\alpha}_5 &= -\alpha_5, \\
 \bar{\alpha}_6 &= -\alpha_6, & \bar{\alpha}_7 &= -\alpha_7.
 \end{aligned}$$



Home Page

Title Page



Page 4 of 14

Go Back

Full Screen

Close

Quit

## 正四面体的旋转群

$$H = \{I, A_1, A_1^2, A_2, A_2^2, A_3, A_3^2, A_4, A_4^2, B_1, B_2, B_3\},$$

其中

$$\begin{aligned} I &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & A_1 &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ A_1^2 &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & A_2 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{6}\sqrt{3} & -\frac{1}{3}\sqrt{6} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3}\sqrt{2} \\ 0 & \frac{2}{3}\sqrt{2} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \\ A_2^2 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ -\frac{1}{6}\sqrt{3} & -\frac{1}{6} & \frac{2}{3}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{3}\sqrt{6} & -\frac{1}{3}\sqrt{2} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, & A_3 &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{6}\sqrt{3} & \frac{1}{3}\sqrt{6} \\ -\frac{1}{6}\sqrt{3} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{3}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{3}\sqrt{6} & -\frac{1}{3}\sqrt{2} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \\ A_3^2 &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6}\sqrt{3} & -\frac{1}{3}\sqrt{6} \\ \frac{1}{6}\sqrt{3} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{3}\sqrt{2} \\ \frac{1}{3}\sqrt{6} & -\frac{1}{3}\sqrt{2} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, & A_4 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ \frac{1}{6}\sqrt{3} & -\frac{1}{6} & \frac{2}{3}\sqrt{2} \\ \frac{1}{3}\sqrt{6} & -\frac{1}{3}\sqrt{2} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \\ A_4^2 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6}\sqrt{3} & \frac{1}{3}\sqrt{6} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3}\sqrt{2} \\ 0 & \frac{2}{3}\sqrt{2} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, & B_1 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\sqrt{2} \\ 0 & \frac{2}{3}\sqrt{2} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \\ B_2 &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3}\sqrt{3} & -\frac{1}{3}\sqrt{6} \\ \frac{1}{3}\sqrt{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{3}\sqrt{6} & -\frac{1}{3}\sqrt{2} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, & B_3 &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3}\sqrt{3} & \frac{1}{3}\sqrt{6} \\ -\frac{1}{3}\sqrt{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\sqrt{2} \\ \frac{1}{3}\sqrt{6} & -\frac{1}{3}\sqrt{2} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$



Home Page

Title Page



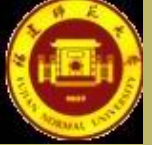
Page 5 of 14

Go Back

Full Screen

Close

Quit



它的乘法表:

| $\cdot$ | $I$     | $A_1$   | $A_1^2$ | $A_2$   | $A_2^2$ | $A_3$   | $A_3^2$ | $A_4$   | $A_4^2$ | $B_1$   | $B_2$   | $B_3$   |
|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $I$     | $I$     | $A_1$   | $A_1^2$ | $A_2$   | $A_2^2$ | $A_3$   | $A_3^2$ | $A_4$   | $A_4^2$ | $B_1$   | $B_2$   | $B_3$   |
| $A_1$   | $A_1$   | $A_1^2$ | $I$     | $A_4^2$ | $B_2$   | $A_2^2$ | $B_3$   | $A_3^2$ | $B_1$   | $A_2$   | $A_3$   | $A_4$   |
| $A_1^2$ | $A_1^2$ | $I$     | $A_1$   | $B_1$   | $A_3$   | $B_2$   | $A_4$   | $B_3$   | $A_2$   | $A_4^2$ | $A_2^2$ | $A_3^2$ |
| $A_2$   | $A_2$   | $A_3^2$ | $B_2$   | $A_2^2$ | $I$     | $A_4^2$ | $B_1$   | $A_1^2$ | $B_3$   | $A_1$   | $A_4$   | $A_3$   |
| $A_2^2$ | $A_2^2$ | $B_1$   | $A_4$   | $I$     | $A_2$   | $B_3$   | $A_1$   | $B_2$   | $A_3$   | $A_3^2$ | $A_1^2$ | $A_4^2$ |
| $A_3$   | $A_3$   | $A_4^2$ | $B_3$   | $A_1^2$ | $B_1$   | $A_3^2$ | $I$     | $A_2^2$ | $B_2$   | $A_4$   | $A_1$   | $A_2$   |
| $A_3^2$ | $A_3^2$ | $B_2$   | $A_2$   | $B_3$   | $A_4$   | $I$     | $A_3$   | $B_1$   | $A_1$   | $A_2^2$ | $A_4^2$ | $A_1^2$ |
| $A_4$   | $A_4$   | $A_2^2$ | $B_1$   | $A_3^2$ | $B_3$   | $A_1^2$ | $B_2$   | $A_4^2$ | $I$     | $A_3$   | $A_2$   | $A_1$   |
| $A_4^2$ | $A_4^2$ | $B_3$   | $A_3$   | $B_2$   | $A_1$   | $B_1$   | $A_2$   | $I$     | $A_4$   | $A_1^2$ | $A_3^2$ | $A_2^2$ |
| $B_1$   | $B_1$   | $A_4$   | $A_2^2$ | $A_3$   | $A_1^2$ | $A_2$   | $A_4^2$ | $A_1$   | $A_3^2$ | $I$     | $B_3$   | $B_2$   |
| $B_2$   | $B_2$   | $A_2$   | $A_3^2$ | $A_1$   | $A_4^2$ | $A_4$   | $A_1^2$ | $A_3$   | $A_2^2$ | $B_3$   | $I$     | $B_1$   |
| $B_3$   | $B_3$   | $A_3$   | $A_4^2$ | $A_4$   | $A_3^2$ | $A_1$   | $A_2^2$ | $A_2$   | $A_1^2$ | $B_2$   | $B_1$   | $I$     |

Home Page

Title Page



Page 6 of 14

Go Back

Full Screen

Close

Quit



## 4元交错群

$$\mathbb{A}_4 = \left\{ \begin{array}{cccc} (1), & (234), & (243), & (134), \\ (143), & (124), & (142), & (123), \\ (132), & (13)(24), & (14)(23), & (12)(34) \end{array} \right\}$$

同构映射:

$$\begin{aligned} \psi : H &\rightarrow \mathbb{A}_4, \\ A_1 &\mapsto (234), & A_1^2 &\mapsto (243), \\ A_2 &\mapsto (134), & A_2^2 &\mapsto (143), \\ A_3 &\mapsto (124), & A_3^2 &\mapsto (142), \\ A_4 &\mapsto (123), & A_4^2 &\mapsto (132), \\ B_1 &\mapsto (13)(24), & B_2 &\mapsto (14)(23), \\ B_3 &\mapsto (12)(34), & I &\mapsto (1). \end{aligned}$$

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀](#) [▶](#)

[◀](#) [▶](#)

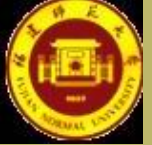
Page 7 of 14

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



## 二. 群作用的例子

**定义** 设 $G$ 是一个群,  $\Omega$ 是一个非空集合. 如果有一个映射

$$\circ : G \times \Omega \rightarrow \Omega, (a, x) \mapsto a \circ x, \forall a \in G, x \in \Omega$$

满足 $(ab) \circ x = a \circ (b \circ x)$ ,  $e \circ x = x$ ,  $\forall a, b \in G, \forall x \in \Omega$ , 则称群 $G$ 在集合 $\Omega$ 上有一个**作用**.

**例** 设 $\Omega = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \bar{\alpha}_5, \bar{\alpha}_6, \bar{\alpha}_7\}$ , 则

$$\{M\alpha_i, M\bar{\alpha}_j | M \in H, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, j = 5, 6, 7\} = \Omega,$$

$$\{M\alpha_i, M\bar{\alpha}_j | M \in G, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, j = 5, 6, 7\} = \Omega.$$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 8 of 14

Go Back

Full Screen

Close

Quit



**定义** 设群 $G$ 在集合 $\Omega$ 上有一个作用, 对于 $x \in \Omega$ , 令 $G(x) = \{gx | x \in G\}$ ,

称 $G(x)$ 是 $x$ 的**轨道**.

例如, 若 $\Omega = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \bar{\alpha}_5, \bar{\alpha}_6, \bar{\alpha}_7\}$ , 则

$$H(\alpha_1) = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\},$$

$$H(\alpha_5) = \{\alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \bar{\alpha}_5, \bar{\alpha}_6, \bar{\alpha}_7\},$$

且

$$\Omega = H(\alpha_1) \cup H(\alpha_5), \quad H(\alpha_1) \cap H(\alpha_5) = \emptyset$$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 9 of 14

Go Back

Full Screen

Close

Quit

例如, 令

$$\Omega = \{\beta_{1,2}^n, \beta_{2,1}^n, \beta_{1,3}^n, \beta_{3,1}^n, \beta_{1,4}^n, \beta_{4,1}^n, \beta_{2,3}^n, \beta_{3,2}^n, \beta_{2,4}^n, \beta_{4,2}^n, \beta_{3,4}^n, \beta_{4,3}^n | n = 1, 2, \dots\},$$

其中

$$\begin{aligned}\beta_{1,2}^n &= \frac{1}{n}\alpha_1 + (1 - \frac{1}{n})\alpha_2, & \beta_{2,1}^n &= \frac{1}{n}\alpha_2 + (1 - \frac{1}{n})\alpha_1, \\ \beta_{1,3}^n &= \frac{1}{n}\alpha_1 + (1 - \frac{1}{n})\alpha_3, & \beta_{3,1}^n &= \frac{1}{n}\alpha_3 + (1 - \frac{1}{n})\alpha_1, \\ \beta_{1,4}^n &= \frac{1}{n}\alpha_1 + (1 - \frac{1}{n})\alpha_4, & \beta_{4,1}^n &= \frac{1}{n}\alpha_4 + (1 - \frac{1}{n})\alpha_1, \\ \beta_{2,3}^n &= \frac{1}{n}\alpha_2 + (1 - \frac{1}{n})\alpha_3, & \beta_{3,2}^n &= \frac{1}{n}\alpha_3 + (1 - \frac{1}{n})\alpha_2, \\ \beta_{2,4}^n &= \frac{1}{n}\alpha_2 + (1 - \frac{1}{n})\alpha_4, & \beta_{4,2}^n &= \frac{1}{n}\alpha_4 + (1 - \frac{1}{n})\alpha_2, \\ \beta_{3,4}^n &= \frac{1}{n}\alpha_3 + (1 - \frac{1}{n})\alpha_4, & \beta_{4,3}^n &= \frac{1}{n}\alpha_4 + (1 - \frac{1}{n})\alpha_3.\end{aligned}$$

则

$$H(\beta_{1,2}^n) = \{\beta_{1,2}^n, \beta_{2,1}^n, \beta_{1,3}^n, \beta_{3,1}^n, \beta_{1,4}^n, \beta_{4,1}^n, \beta_{2,3}^n, \beta_{3,2}^n, \beta_{2,4}^n, \beta_{4,2}^n, \beta_{3,4}^n, \beta_{4,3}^n\},$$

$n = 1, 2, \dots$ , 且

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} H(\beta_{1,2}^i), \quad H(\beta_{1,2}^n) \cap H(\beta_{1,2}^m) = \emptyset, \quad n \neq m.$$



Home Page

Title Page



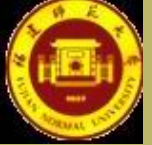
Page 10 of 14

Go Back

Full Screen

Close

Quit



齐性空间: 如果群 $G$ 在集合 $\Omega$ 上的作用只有一条轨道, 即对于任意 $x, y \in \Omega$ , 存在 $g \in G$ , 使得 $y = g \circ x$ , 则群 $G$ 在集合 $\Omega$ 上的这个作用是传递的, 此时 $\Omega$ 称为群 $G$ 的齐性空间.

例如, 若 $\Omega = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ , 则 $H(\alpha_1) = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\} = \Omega$ , 故 $\Omega$ 是 $H$ 的齐性空间.

**定义** 设群 $G$ 在集合 $\Omega$ 上有一个作用. 给定 $x \in \Omega$ , 令 $G_x = \{g \in G | g \circ x = x\}$ , 则称 $G_x$ 为 $x$ 的**稳定子**.

易证:  $G_x < G$ , 称为 $x$ 的**稳定子群**.

例如,  $G_{\alpha_i} = \{I, A_i, A_i^2\}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ ,  $G_{\alpha_j} = G_{\bar{\alpha}_j} = \{I, B_j\}$ ,  $j = 5, 6, 7$ .

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 11 of 14

Go Back

Full Screen

Close

Quit



### 三. Sylow定理的例子

**Sylow第一定理** 设群 $G$ 的阶为 $n = p^l m$ , 其中 $p$ 为素数,  $(m, p) = 1, l > 0$ , 则对于 $1 \leq k \leq l$ ,  $G$ 中必有 $p^k$ 阶子群, 其中 $p^l$ 阶子群称为 $G$ 的Sylow  $p$ -子群.

对于群 $H$ ,  $|H| = 12$ , 有4个3阶子群:  $H_1 = \{I, A_1, A_1^2\}$ ,  $H_2 = \{I, A_2, A_2^2\}$ ,  $H_3 = \{I, A_3, A_3^2\}$ ,  $H_4 = \{I, A_4, A_4^2\}$ ; 3个2阶子群:  $H_5 = \{I, B_1\}$ ,  $H_6 = \{I, B_2\}$ ,  $H_7 = \{I, B_3\}$ ; 1个4阶子群:  $H_8 = \{I, B_1, B_2, B_3\}$ ; 没有6阶子群. 2, 3, 4都是素数的方幂.

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

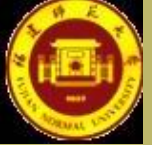
Page 12 of 14

Go Back

Full Screen

Close

Quit



**Sylow 第二定理** 设群 $G$ 的阶为 $n = p^l m$ , 其中 $p$ 为素数,  $(m, p) = 1$ ,

$l > 0$ , 则

(1) 对于 $1 \leq k \leq l$ ,  $G$ 的任意一个 $p^k$ 阶子群一定包含在 $G$ 的某个Sylow  $p$ -子群中;

(2)  $G$ 的任意两个Sylow  $p$ -子群在 $G$ 中共轭.

考虑群 $H$ , 则 $(A_2^2)^T H_1 A_2^2 = H_4$ ,  $B_1^T H_1 B_1 = H_3$ ,  $B_3^T H_1 B_3 = H_2$ . 由此可见,  $H$ 的Sylow 3-子群都是共轭的, 且2阶子群都包含在Sylow 2-子群 $H_8$ 中.

**Sylow 第三定理** 设群 $G$ 的阶为 $n = p^l m$ , 其中 $p$ 为素数,  $(m, p) = 1$ ,  $l > 0$ ,  $G$ 的Sylow  $p$ -子群的个数为 $r$ , 则 $r \equiv 1 \pmod{p}$ , 且 $r|m$ .

例如,  $H$ 中3-Sylow子群的个数为4, 2-sylow子群的个数为1.

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 13 of 14

Go Back

Full Screen

Close

Quit



谢谢!



[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀](#) [▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 14 of 14

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

2005 4 8