



[Home Page](#)

[Title Page](#)



[Page 1 of 12](#)

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

武夷山会议

几类空间比较

辛 林

福建师大数学与计算机科学学院



Home Page

Title Page



Page 2 of 12

Go Back

Full Screen

Close

Quit



主要内容

- 一、双线性实函数
- 二、几类空间定义
- 三、几类空间之间的关系

Home Page

Title Page



Page 3 of 12

Go Back

Full Screen

Close

Quit



1 双线性实函数

定义1、设 V 是实数域 R 上的向量空间，映射 $f : V \times V \rightarrow R$ ，如果满足 $\forall \alpha, \beta, \gamma \in V, k_1, k_2 \in R$

$$f(k_1\alpha + k_2\beta, \gamma) = k_1f(\alpha, \gamma) + k_2f(\beta, \gamma)$$

$$f(\alpha, k_1\beta + k_2\gamma) = k_1f(\alpha, \beta) + k_2f(\alpha, \gamma)$$

则称 f 是双线性实函数。

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 4 of 12

Go Back

Full Screen

Close

Quit



注:

- (1) 对称双线性实函数: 双线性实函数, 并且对称: $f(\alpha, \beta) = f(\beta, \alpha)$
- (2) 正定对称双线性实函数: 对称双线性实函数, 并且正定: $f(\alpha, \alpha) \geq 0$, 并且 $f(\alpha, \alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$.
- (3) 正定对称双线性实函数 \Leftrightarrow 内积.

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀◀](#) [▶▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 5 of 12

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



2 几类空间定义

度量空间:赋有距离函数 d 的非空集合 V , 称 (V, d) 为度量空间.

注1: 距离函数 $d: V \times V \rightarrow R$ 满足:

(1) $d(\alpha, \beta) \geq 0$, 等号成立当且仅当 $\alpha = \beta$.

(2) $d(\alpha, \beta) = d(\beta, \alpha)$

(3) $d(\alpha, \beta) \leq d(\alpha, \gamma) + d(\gamma, \beta)$

注2: 任意非空集合 V , 都存在距离函数.

如: 令 $d: V \times V \rightarrow R$ 使 $d(\alpha, \beta) = \begin{cases} 0 & \text{如果 } \alpha = \beta \\ 1 & \text{如果 } \alpha \neq \beta \end{cases}$

则 (V, d) 是度量空间。

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 6 of 12

Go Back

Full Screen

Close

Quit



赋范空间:赋有范数的实向量空间称为赋范空间.

注1: 实数域 R 上的向量空间 V 上的一个非负实值函数, 记为 $\|\cdot\|$,满足:

$$(1) \forall \alpha \in V, \|\alpha\| \geq 0, \|\alpha\| = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$$

$$(2) \forall \alpha \in V, \forall k \in R, \|k\alpha\| = |k| \|\alpha\|$$

$$(3) \forall \alpha, \beta \in V, \|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|. \text{ (三角不等式)}$$

称为范数。

注2: 同一个有限维向量空间上可以有許多范数。但它们都是等价的(见: 蒋尔雄, 高坤敏, 吴景琨, 线性代数, 人民教育出版社, 1978年)。这里等价是指: 设 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是两个范数, 如果存在正实数 c_1 和 c_2 , 使对任意 $\alpha \in V$, 有 $\|\alpha\|_1 \leq c_1 \|\alpha\|_2$, 并且 $\|\alpha\|_2 \leq c_2 \|\alpha\|_1$.

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 7 of 12

Go Back

Full Screen

Close

Quit



正交空间:赋有对称双线性函数 $f : V \times V \rightarrow K$ 的向量空间 ${}_K V$ 称为正交空间。

注: 虽然没有长度, 角度, 距离等度量概念, 但有正交概念: $\alpha \perp \beta \Leftrightarrow f(\alpha, \beta) = 0$. 从而有正交基和标准正交基等相应概念。在正交空间中, 迷向向量, 即自正交向量 $f(\alpha, \alpha) = 0$ 的非零向量 α 是一类很重要的向量。

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 8 of 12

Go Back

Full Screen

Close

Quit



实内积空间:赋有正定对称双线性函数 $f : V \times V \rightarrow R$ 的向量空间 ${}_R V$ 称为实内积空间。

注：有许多版本的《高等代数》或《线性代数》教材都采用实内积空间作为欧氏空间的定义。

如：

- [1] 陈昭木等，高等代数，福建教育出版社，1992年.
- [2] 魏献祝，高等代数，华东师范大学出版社，1990年.
- [3] 北京大学数力系，高等代数，高等教育出版社，1988年.
- [4] 张禾瑞，郝炳新，高等代数(第三版)，高等教育出版社，1986年.
- [5] 张远达，线性代数原理，上海教育出版社，1980年.
- [6] 蒋尔雄，高坤敏，吴景琨，线性代数,人民教育出版社, 1978年.
- [7] 谢邦杰，线性代数，人民教育出版社，1978年.

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 9 of 12

Go Back

Full Screen

Close

Quit



欧氏空间(欧几里得空间):有限维实内积空间称为欧氏空间。

因此这个定义表明：在同构意义下，欧氏空间是 \mathcal{R}^n . 实内积空间与欧氏空间的区别在于维数上。

这种定义的欧氏空间如：

[8]丘维声，高等代数(第二版)，高等教育出版社，2005年.

[9] K.Hoffman and R.Kunze, Linear Algebra, second Edition, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1971.

Home Page

Title Page

◀▶

◀▶

Page 10 of 12

Go Back

Full Screen

Close

Quit



三、几类空间之间的关系

3.1 隐含关系：欧氏空间 \Rightarrow 实内积空间 \Rightarrow 正交空间

3.2 诱导关系：实内积空间 $\xrightarrow{(1)}$ 赋范空间 $\xrightarrow{(2)}$ 度量空间

注(1):如果 ${}_R V$ 是实内积空间， $\langle -, - \rangle$ 是内积.

令 $\| \alpha \| = |\alpha| = \sqrt{\langle \alpha, \alpha \rangle}$, 则 $\| \cdot \|$ 是范数, 从而 $({}_R V, \| \cdot \|)$ 是赋范空间.

注(2):如果 ${}_R V$ 是赋范空间, 范数为 $\| \cdot \|$.

令 $d : V \times V \rightarrow R$ 使 $d(\alpha, \beta) = \| \alpha - \beta \|$, 则 $({}_R V, d)$ 是度量空间。

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 11 of 12

Go Back

Full Screen

Close

Quit



Contents

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 12 of 12

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

谢谢大家