
福建師範大學

武夷山会议

几类空间比较

辛 林

福建师大数学与计算机科学学院

主要内容

- 一、双线性实函数
- 二、几类空间定义
- 三、几类空间之间的关系

1 双线性实函数

定义1、设V是实数域R上的向量空间，映射$f: V\times V\to R$, 如果满足$\forall \alpha,\beta,\gamma\in V, k_1,k_2\in R$

$$f(k_1\alpha+k_2\beta,\gamma)=k_1f(\alpha,\gamma)+k_2f(\beta,\gamma)$$

$$f(\alpha,k_1\beta+k_2\gamma)=k_1f(\alpha,\beta)+k_2f(\alpha,\gamma)$$

则称f是双线性实函数。

注：

(1) 对称双线性实函数：双线性实函数，并且对称：$f(\alpha,\beta)=f(\beta,\alpha)$

(2) 正定对称双线性实函数：对称双线性实函数，并且正定：$f(\alpha,\alpha)\geq 0$, 并且$f(\alpha,\alpha)=0\Leftrightarrow\alpha=0$.

(3) 正定对称双线性实函数$\Leftrightarrow$内积.

2 几类空间定义

度量空间:赋有距离函数d的非空集合V, 称(V,d)为度量空间.

注1：距离函数$d: V\times V\to R$满足：

(1) $d(\alpha,\beta)\geq 0$, 等号成立当且仅当$\alpha=\beta$.

(2) $d(\alpha,\beta)=d(\beta,\alpha)$

(3) $d(\alpha,\beta)\leq d(\alpha,\gamma)+d(\gamma,\beta)$

注2：任意非空集合V, 都存在距离函数.

如：令$d: V\times V\to R$使$d(\alpha,\beta)=\begin{cases}0 & \text{如果}\alpha=\beta\\ 1 & \text{如果}\alpha\neq\beta\end{cases}$

则(V,d)是度量空间。

赋范空间:赋有范数的实向量空间称为赋范空间.

注1：实数域R上的向量空间V上的一个非负实值函数，记为$\| \cdot \|$,满足：

(1) $\forall \alpha \in V, \| \alpha \| \geq 0, \| \alpha \| = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$

(2) $\forall \alpha \in V, \forall k \in R, \| k\alpha \| = |k| \, \| \alpha \|$

(3) $\forall \alpha, \beta \in V, \| \alpha + \beta \| \leq \| \alpha \| + \| \beta \|$. (三角不等式)

称为范数。

注2：同一个有限维向量空间上可以有许多范数。但它们都是等价的(见：蒋尔雄，高坤敏，吴景琨，线性代数,人民教育出版社, 1978年)。这里等价是指：设$\| \cdot \|_1$和$\| \cdot \|_2$是两个范数，如果存在正实数c_1和c_2，使对任意$\alpha \in V$, 有$\| \alpha \|_1 \leq c_1 \| \alpha \|_2$，并且$\| \alpha \|_2 \leq c_2 \| \alpha \|_1$.

正交空间:赋有对称双线性函数$f : V \times V \to K$的向量空间$_K V$称为正交空间。

注：虽然没有长度，角度，距离等度量概念，但有正交概念：$\alpha \perp \beta \Leftrightarrow f(\alpha, \beta) = 0$. 从而有正交基和标准正交基等相应概念。在正交空间中，迷向向量，即自正交向量$f(\alpha, \alpha) = 0$的非零向量α是一类很重要的向量。

实内积空间:赋有正定对称双线性函数$f: V \times V \to R$的向量空间${}_RV$称为实内积空间。

注：有许多版本的《高等代数》或《线性代数》教材都采用实内积空间作为欧氏空间的定义。

如：

[1] 陈昭木等，高等代数，福建教育出版社，1992年.
[2] 魏献祝，高等代数，华东师范大学出版社，1990年.
[3] 北京大学数力系，高等代数，高等教育出版社，1988年.
[4] 张禾瑞，郝炳新，高等代数(第三版)，高等教育出版社，1986年.
[5] 张远达，线性代数原理，上海教育出版社，1980年.
[6] 蒋尔雄，高坤敏，吴景琨，线性代数,人民教育出版社, 1978年.
[7] 谢邦杰，线性代数，人民教育出版社，1978年.

欧氏空间(欧几里得空间):有限维实内积空间称为欧氏空间。

因此这个定义表明：在同构意义下，欧氏空间是$\mathcal{R}^n$. 实内积空间与欧氏空间的区别在于维数上。

这种定义的欧氏空间如:

[8]丘维声，高等代数(第二版)，高等教育出版社，2005年.

[9] K.Hoffman and R.Kunze, Linear Algebra, second Edition, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersy, 1971.

三、几类空间之间的关系

3.1 隐含关系：欧氏空间$\Rightarrow$ 实内积空间$\Rightarrow$ 正交空间

3.2 诱导关系：实内积空间$\stackrel{(1)}{\longrightarrow}$赋范空间$\stackrel{(2)}{\longrightarrow}$度量空间

注(1):如果${}_RV$是实内积空间，$< -,- >$是内积.

令$\| \alpha \| = |\alpha| = \sqrt{< \alpha, \alpha >}$, 则$\| \cdot \|$是范数，从而$({}_RV, \| \cdot \|)$是赋范空间.

注(2):如果${}_RV$是赋范空间，范数为$\| \cdot \|$.

令$d : V \times V \to R$使$d(\alpha, \beta) = \| \alpha - \beta \|$, 则$({}_RV, d)$是度量空间。

谢谢大家

Contents