模论，林亚南，厦门大学数学科学学院，　2008 年 6 月

§7. 有限生成 Abel 群的分解定理

设 G 是一个 Abel 群. 则 G 自然是主理想整环 $\mathbb{Z}$ 上的模. 当 G 是一个有限生成 Abel 群. 则 G 是一个有限生成 $\mathbb{Z}$- 模. 这样, 我们可以将 §5 中关于主理想整环上有限生成模的分解定理翻译成 Abel 群的语言.

设 G 是一个有限生成 Abel 群. 则 G 是一个有限生成 $\mathbb{Z}$- 模. 根据定理 12, G 可以分解为挠模 G_{tor} 与一个自由子模 F 的直和. 设秩 $(F) = r$, 则 $F \cong \mathbb{Z}^r$. 因为 G_{tor} 也是有限生成的, 而每个生成元的阶是有限的, 所以 G_{tor} 是有限 Abel 群.

若 G_{tor} 的阶为

$$\mu = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_m^{e_m},$$

这里 $p_i, 1 \leq i \leq m$ 为互不相同的素数. 则 G_{tor} 分解为

$$G_{tor} = G_{p_1^{e_1}} \oplus G_{p_2^{e_2}} \oplus \cdots G_{p_m^{e_m}},$$

这里 $G_{p_i^{e_i}} := \{v \in G_{tor} \mid p_i^{e_i} v = 0\}$ 是 G_{tor} 的阶为 $p_i^{e_i}$ 的子群,　$1 \leq i \leq m$.

进一步, 每个 $G_{p_i^{e_i}}$ 可分解为循环子群的直和

$$G_{p_i^{e_i}} = \langle v_{i1} \rangle \oplus \langle v_{i2} \rangle \oplus \cdots \oplus \langle v_{ik_i} \rangle,$$

这里 $\langle v_{ij} \rangle$ 的阶为 $p_i^{e_{ij}}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq k_i$, 且 $e_i = e_{i1} \geq e_{i2} \geq \cdots \geq e_{ik_i} \geq 1$, $1 \leq i \leq m$.

G 的初等因子 $p_i^{e_{ij}}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq i \leq k_i$, 和 F 的秩是唯一确定.

考虑每个循环子群 $\langle v_{ij} \rangle$. 定义 $\varphi : \mathbb{Z} \to \langle v_{ij} \rangle$, $n \mapsto n v_{ij}$. 则易见 φ 是 Abel 群满同态且 $\mathrm{Ker}(\varphi) = \langle p_i^{e_{ij}} \rangle$. 故

$$\langle v_{ij} \rangle \cong \mathbb{Z}/\langle p_i^{e_{ij}} \rangle \cong \mathbb{Z}_{p_i^{e_{ij}}},\ 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq k_i.$$

所以 $\langle v_{ij} \rangle$ 的元素个数为 $p_i^{e_{ij}}$. 因而 $G_{p_i^{e_i}}$ 的元素个数为 $\sum_{j=1}^{k_i} p_i^{e_{ij}}$, $1 \leq i \leq m$. 一个群 G 的 Sylow p- 子群是元素个数为 p^d 的子群, 其中 $p^d || G|$, 且 $p^{d+1} \nmid |G|$. 群 G 的 Sylow p- 子群总存在. 所以, 循环子模 $G_{p_i^{e_{ij}}}$ 是 Sylowp_i- 子群.

归纳起来，有以下定理.

定理 24. 设 G 是一个有限生成 Abel 群. 则

$$G = (\mathbb{Z}_{p_i^{e_{11}}} \oplus \mathbb{Z}_{p_i^{e_{12}}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_i^{e_{1k_1}}}) \oplus \cdots \oplus (\mathbb{Z}_{p_i^{e_{m1}}} \oplus \mathbb{Z}_{p_i^{e_{m2}}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_i^{e_{mk_m}}}) \oplus \mathbb{Z}^r,$$

这里 $p_i^{e_{ij}}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m_i$ 和 r 由 G 唯一确定.

例. 元素个数为 24 的互不同构的 Abel 群只有三个.

解. 初等因子有三种 $(3,8), (3,4,2)$ 和 $(3,2,2,2)$. 所以 G 与下列一个群同构：$\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_8, \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. □

习题:

1. 试确定元素个数为 392 的所有不同构的 Abel 群.
2. 写出初等因子为 $(3^7, 3^5, 3^2, 3^2, 3)$ 的 Abel 群中 9 阶子群的个数.