

模论, 林亚南, 厦门大学数学科学学院, 2008 年 6 月

## §6. Jordan 标准形

本章总设  $V$  是域  $F$  上  $n$  维线性空间.  $\sigma$  是  $V$  的一个线性变换. 设  $F[x]$  是域  $F$  上一元多项式环, 是主理想整环.

### 6.1 作为 $F[x]$ - 模的线性空间

**定理 18.** 定义  $f(x)v := f(\sigma)(v)$ ,  $f(x) \in F[x]$ ,  $v \in V$ , 则  $V$  是主理想整环  $F[x]$  上的有限生成挠模.

**证明:** 易证在这个定义下,  $V$  是  $F[x]$ - 模. 记  $S := \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  是线性空间  $V$  的一个基, 则对任意的  $v \in V$ , 有线性组合

$$v = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n,$$

这里  $a_i \in F \subseteq F[x]$ . 故  $S$  生成  $V$ .

对  $\sigma$ , 易知存在  $f(x) \in F[x]$ , 使得  $f(\sigma) = 0$ , 故对于任意  $v \in V$ , 有  $f(x)v = 0$ . 即  $V$  是挠模.  $\square$

**定理 19.** 设  $W$  为  $V$  的子空间, 则  $W$  是  $V$  的  $F[x]$ - 子模的充分必要条件是  $W$  是  $\sigma$ - 不变子空间.

**证明:** 留做练习.  $\square$

下面考虑  $V$  的零化子. 对  $\sigma$ , 令  $I$  是  $\sigma$  的零化多项式的集合, 即  $I := \{f(x) \in F[x] \mid f(\sigma) = 0\}$ . 则  $I$  是  $F[x]$  的理想, 因而是主理想. 其生成元是相伴的, 取首项系数为 1 的生成元  $m_\sigma(x)$ , 称为  $\sigma$  的 **极小多项式**.

设  $v \in V$ , 则  $\langle v \rangle := \{f(x)v \mid f(x) \in F[x]\}$  是  $V$  的  $F[x]$ - 子模, 因而  $\langle v \rangle := \{f(\sigma)v \mid f(x) \in F[x]\}$  是线性空间  $V$  的  $\sigma$ - 不变子空间. 令  $\delta$  是  $\sigma$  在  $\langle v \rangle$  的限制映射, 即  $\delta := \sigma|_{\langle v \rangle}$ . 记  $\delta$  的极小多项式为  $m_\delta(x)$ .

**引理 3.** (1)  $\text{ann}_R(V) = \langle m_\sigma(x) \rangle$ ;

(2)  $\text{ann}_R(v) = \langle m_\delta(x) \rangle$ ;

(3)  $m_\delta(x) \mid m_\sigma(x)$ .

**证明:** 由定义即得.  $\square$

**引理 4.** 设  $v \in V$ . 令  $\delta$  是  $\sigma$  在  $\langle v \rangle$  的限制映射, 即  $\delta := \sigma|_{\langle v \rangle}$ . 设  $\delta$  的极小多项式为  $m_\delta(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{m-1}x^{m-1} + x^m$ . 则

$$S := \{v, \sigma(v), \sigma^2(v), \dots, \sigma^{m-1}(v)\},$$

是  $\sigma$ -子空间  $\langle v \rangle$  的一个  $F$ -基.

**证明:** 显然  $S \subseteq \langle v \rangle$ . 对于  $f(x) \in F[x]$ ,  $f(x) = m_\sigma(x)q(x) + r(x)$ , 这里  $\deg r(x) < m$  或者  $r(x) = 0$ . 所以  $f(\sigma)(v) = q(\sigma)m_\sigma(\sigma)(v) + r(\sigma)(v) = r(\sigma)(v) \in \langle S \rangle$ . 故  $\langle v \rangle = \langle S \rangle$ .

另一方面, 设  $b_0v + b_1\sigma(v) + b_2\sigma^2(v) + \cdots + b_{m-1}\sigma^{m-1}(v) = 0$ ,  $b_i \in F$ ,  $0 \leq i \leq m$ , 即  $(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_{m-1}x^{m-1})v = 0$ . 因为  $\text{ann}_R(v) = \langle m_\delta(x) \rangle$ , 所以  $m_\delta(x) | b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_{m-1}x^{m-1}$ , 因为  $\deg m_\delta(x) = m$ , 故  $b_i = 0$ ,  $0 \leq i \leq m$ . 因而  $S$  线性无关, 是  $\langle v \rangle$  的一个  $F$ -基.  $\square$

$V$  的一个  $\sigma$ -不变子空间  $W$  称为  $\sigma$ -循环子空间, 如果存在  $v \in W$ , 使得

$$\{v, \sigma(v), \sigma^2(v), \dots, \sigma^{m-1}(v)\}$$

是  $W$  的一个基. 这个基称为 **循环基**.

**定理 20.** (1) 设  $W$  是  $V$  的子模, 则  $W$  是  $V$  的循环  $F[x]$ -子模的充分必要条件是  $W$  是  $\sigma$ -循环子空间;

(2) 若  $W := \langle v \rangle$  是  $V$  的一个  $\sigma$ -循环子空间,  $\delta := \sigma|_W$  的极小多项式为

$$m_\delta(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{m-1}x^{m-1} + x^m.$$

则

$$S := \{v, \sigma(v), \sigma^2(v), \dots, \sigma^{m-1}(v)\}$$

是  $W$  的一个循环基, 且  $\delta$  在循环基  $S$  下的矩阵为

$$C(m_\delta(x)) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & -a_{m-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{m-1} \end{pmatrix}.$$

这里  $C(m_\delta(x))$  称为 (相对于多项式  $m_\delta(x)$  的) **友矩阵**.

(3) 若  $W := \langle v \rangle$  是  $V$  的一个  $\sigma$ -循环子空间,  $\delta = \sigma|_W$  在循环基  $\{v, \sigma(v), \sigma^2(v), \dots, \sigma^{m-1}(v)\}$

$\dots, \sigma^{m-1}(v)\}$  下的矩阵为友矩阵

$$C(m_\delta(x)) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & -a_{m-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{m-1} \end{pmatrix},$$

则

$$m_\delta(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{m-1}x^{m-1} + x^m.$$

**证明:** (1) 设作为  $V$  的循环子模有  $W = \langle v \rangle$ . 记  $\text{ann}_R(v) = \langle m_\delta \rangle$ , 这里  $\delta = \sigma|_{\langle v \rangle}$ . 由引理 4 知  $W$  是  $\sigma$ -循环子空间. 反之, 设  $W$  是  $\sigma$ -循环子空间, 循环基为

$$\{v, \sigma(v), \sigma^2(v), \dots, \sigma^{m-1}(v)\},$$

则易见作为  $F[x]$ -模有  $W \subseteq \langle v \rangle$ . 由  $v \in W$  和  $W$  是  $\sigma$ -不变子空间, 知  $\langle v \rangle \subseteq W$ .

(2) 因为  $W$  是  $V$  的  $\sigma$ -循环子空间, 由 (1) 知  $W = \langle v \rangle$  是  $F[x]$ -模. 由引理 4 知  $S$  是  $\langle v \rangle$  的一个循环基. 易见  $\sigma(\sigma^i(v)) = \sigma^{i+1}(v)$ ,  $1 \leq i \leq m-2$ ,  $\sigma(\sigma^{m-1}(v)) = -a_0v - a_1\sigma(v) - a_2\sigma^2(v) - \cdots - a_{m-1}\sigma^{m-1}(v)$ . 故  $\delta$  在基  $S$  下的矩阵为友矩阵.

(3) 因在循环基下的矩阵为友矩阵  $C(m_\delta(x))$ , 故有  $\sigma(\sigma^i(v)) = \sigma^{i+1}(v)$ ,  $1 \leq i \leq m-2$ ,  $\sigma(\sigma^{m-1}(v)) = -a_0v - a_1\sigma(v) - a_2\sigma^2(v) - \cdots - a_{m-1}\sigma^{m-1}(v)$ . 记  $g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{m-1}x^{m-1} + x^m$ , 则  $g(\sigma)v = 0$ , 故有  $g(\delta) = 0$ . 另一方面, 由引理 4 的结论知  $\deg m_\delta(x) = m$ , 故  $m_\delta(x) = g(x)$ .  $\square$

**注 11:** 设  $W = \langle v \rangle$  是  $\sigma$ -循环子空间, 其中  $\delta = \sigma|_W$ , 则  $W \subseteq \text{Ker}(m_\delta(\sigma))$ .

## 6.2 线性空间的分解

有了上面的准备, 我们可以将 §5 中的定理 16 翻译为线性空间的分解定理.

**定理 21.** 设  $V$  是域  $F$  上  $n$  维线性空间.  $\sigma$  是  $V$  的一个线性变换. 若  $\sigma$  的极小多项式为

$$m_\sigma(x) = p_1^{e_1}(x)p_2^{e_2}(x)\cdots p_m^{e_m}(x),$$

这里  $p_i(x)$ ,  $1 \leq i \leq m$ , 为互不相同的首一不可约多项式. 则  $V$  分解为

$$V = \text{Ker}p_1^{e_1}(\sigma) \oplus \text{Ker}p_2^{e_2}(\sigma) \oplus \cdots \oplus \text{Ker}p_m^{e_m}(\sigma),$$

其中  $\text{Ker}p_i^{e_i}(\sigma) := \{v \in V \mid p_i^{e_i}(\sigma)(v) = 0\}$  是  $V$  的  $\sigma$ -不变子空间,  $\sigma|_{\text{Ker}p_i^{e_i}(\sigma)}$  的极小多项式为  $p_i^{e_i}(x)$ ,  $1 \leq i \leq m$ .



对应的友矩阵为

$$C(p(x)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & -a_{m-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{m-1} \end{pmatrix}.$$

则

$$|xI_m - C(p(x))| = p(x),$$

即

$$t_{C(p(x))}(x) = C(p(x)).$$

**证明:** 留做练习.  $\square$

**命题 8.** 设  $\sigma$  是域  $F$  上  $n$  维线性空间  $V$  的一个线性变换.  $Q$  是  $\sigma$  的有理标准形. 则

$$t_\sigma(x) = |xI_n - Q| = \prod_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq k_i} p_i^{e_{ij}}(x). \quad \square$$

比较  $m_\sigma(x) = \prod_{1 \leq i \leq n} p_i^{e_{i1}}(x)$ ,  $t_\sigma(x) = \prod_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq k_i} p_i^{e_{ij}}(x)$ , 我们有

**推论 3.** 设  $\sigma$  是域  $F$  上  $n$  维线性空间  $V$  的一个线性变换. 则

- (1)  $\sigma$  的极小多项式  $m_\sigma(x)$  和特征多项式  $t_\sigma(x)$  有相同的素因子;
- (2)  $m_\sigma(x) | t_\sigma(x)$ , 因而  $t_\sigma(\sigma) = 0$ .  $\square$

### 6.3 Jordan 标准形

若域  $F$  上的任意非常数多项式的根仍在  $F$  中, 称  $F$  为 **代数闭域**. 因此代数闭域上不可约多项式只有一次因式. 代数闭域的简单例子是复数域  $\mathbb{C}$ . 设  $\sigma$  是  $\mathbb{C}$  上有限维线性空间  $V$  的一个线性变换.

$$m_\sigma(x) = (x - \lambda_1)^{e_1} (x - \lambda_2)^{e_2} \cdots (x - \lambda_m)^{e_m},$$

这里  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  是  $\mathbb{C}$  中不同的元素.

考虑直和分解定理中循环子空间  $W_{ij}$ , 阶为  $p_i^{e_{ij}}(x)$ , 即限制映射  $\delta_{ij} := \sigma|_{W_{ij}}$  有极小多项式  $p_i^{e_{ij}}(x)$ .  $W_{ij}$  有基

$$S_{ij} = \{v_{ij}, \delta_{ij}(v_{ij}), \delta_{ij}^2(v_{ij}), \dots, \delta_{ij}^{d_{ij}-1}(v_{ij})\} = \{v_{ij}, \sigma(v_{ij}), \sigma^2(v_{ij}), \dots, \sigma^{e_{ij}-1}(v_{ij})\}.$$

易证

$$J_{ij} = \{v_{ij}, (\delta_{ij} - \lambda_i)(v_{ij}), (\delta_{ij} - \lambda_i)^2(v_{ij}), \dots, (\delta_{ij} - \lambda_i)^{e_{ij}-1}(v_{ij})\}$$

$$= \{v_{ij}, (\sigma - \lambda_i)(v_{ij}), (\sigma - \lambda_i)^2(v_{ij}), \dots, (\sigma - \lambda_i)^{e_{ij}-1}(v_{ij})\}$$

也是  $W_{ij}$  的基. 因为

$$\delta_{ij}(\delta_{ij} - \lambda_i)^k(v_{ij}) = (\delta_{ij} - \lambda_i)^{k+1}(v_{ij}) + \lambda_i(\delta_{ij} - \lambda_i)^k(v_{ij}), \quad 1 \leq k \leq e_{ij} - 2;$$

$$\delta_{ij}(\delta_{ij} - \lambda_i)^{e_{ij}-1}(v_{ij}) = \lambda_i(\delta_{ij} - \lambda_i)^{e_{ij}-1}(v_{ij}).$$

所以,  $\delta_{ij} = \sigma|_{\langle v_{ij} \rangle}$  在基  $J_{ij}$  下的矩阵为  $e_{ij} \times e_{ij}$  矩阵

$$J(\lambda_i, e_{ij}) = \begin{pmatrix} \lambda_i & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda_i & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

这个矩阵称为  $\lambda_i$  的 **Jordan 块**, 即 Jordan 块为在主对角线上元素为  $\lambda_i$ , 在下次对角线的元素为 1, 其余元素为 0.

**定理 22.** 设  $V$  是  $\mathbb{C}$  上  $n$  维线性空间.  $\sigma$  是  $V$  的一个线性变换. 若  $\sigma$  的极小多项式为

$$m_\sigma(x) = (x - \lambda_1)^{e_1}(x - \lambda_2)^{e_2} \cdots (x - \lambda_m)^{e_m},$$

这里  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  是  $\mathbb{C}$  中不同的元素. 则  $V$  分解为

$$V = (W_{11} \oplus W_{12} \oplus \cdots \oplus W_{1k_1}) \oplus \cdots \oplus (W_{m1} \oplus W_{m2} \oplus \cdots \oplus W_{mk_m}),$$

其中  $W_{ij}$ ,  $1 \leq i \leq m$ ,  $1 \leq j \leq k_i$ , 是  $V$  的  $\delta_{ij}$ -循环子空间,  $\delta_{ij} = \sigma|_{\langle v_{ij} \rangle}$ , 它的极小多项式是  $V$  的初等因子  $(x - \lambda_i)^{e_{ij}}$ , 这里

$$e_i = e_{i1} \geq e_{i2} \geq \cdots \geq e_{ik_i} \geq 1,$$

初等因子由  $\sigma$  唯一确定. 令

$$J_{ij} := \{v_{ij}, (\delta_{ij} - \lambda_i)(v_{ij}), (\delta_{ij} - \lambda_i)^2(v_{ij}), \dots, (\delta_{ij} - \lambda_i)^{e_{ij}-1}(v_{ij})\}$$

是  $\langle v_{ij} \rangle$  的一个基, 则  $\sigma$  在基

$$\{J_{11}, \dots, J_{1k_1}, \dots, J_{m1}, \dots, J_{mk_m}\}$$

下的矩阵为

$$J = \begin{pmatrix} J(\lambda_1, e_{11}) & & & & & \\ & \cdots & & & & \\ & & J(\lambda_1, e_{1k_1}) & & & \\ & & & \cdots & & \\ & & & & J(\lambda_m, e_{m1}) & \\ & & & & & \cdots \\ & & & & & & J(\lambda_m, e_{mk_m}) \end{pmatrix}.$$

上面矩阵称为  $\sigma$  的 **Jordan 标准形**. 由线性空间分解的唯一性, 这样的 Jordan 标准形是唯一确定的.  $\square$

**习题:**

1. 证明定理 20.

2. 证明引理 5.

3. 设  $\sigma$  是域  $F$  上  $n$  维线性空间  $V$  的一个线性变换. 证明:  $V$  为一循环子空间的充分必要条件是  $m_\sigma(x) = t_\sigma(x)$ .

4. 设  $A$  是  $\mathbb{C}$  上  $n$  阶矩阵. 证明:  $A$  相似于对角阵的充分必要条件是  $m_\sigma(x)$  只有单根.

5. 设  $A$  是  $\mathbb{C}$  上  $n$  阶矩阵. 证明:  $A$  与其转置矩阵  $A^T$  相似.

7. 设  $A, B$  是  $\mathbb{C}$  上  $n$  阶矩阵. 证明:  $A$  相似于  $B$  的充分必要条件是对于任意的复数  $\alpha$  有

$$\text{秩}(\alpha I_n - A)^d = \text{秩}(\alpha I_n - B)^d, \quad 1 \leq d \leq n.$$

8. 设  $\sigma$  是  $\mathbb{C}$  上 9 维线性空间  $V$  的一个线性变换.  $\sigma$  的初等因子为  $(x-1)^3, (x-1), (x+1)^2, (x+1), (x+i), (x-i)$ .

(1) 写出  $\sigma$  的 Jordan 标准形;

(2) 在  $\mathbb{R}$  上写出  $\sigma$  的有理标准形 (初等因子形式和不变因子形式).

9 设  $\sigma$  是  $\mathbb{C}$  上 6 维线性空间  $V$  的一个线性变换.  $\sigma$  的不变因子为  $(x-1), (x-1)^2, (x-1)^2(x+1)$ . 写出  $\sigma$  的有理标准型和 Jordan 标准型.

10. 设  $m_\sigma(x) = p_1^{e_1}(x)p_2^{e_2}(x) \cdots p_m^{e_m}(x)$ ,  $t_\sigma(x) = p_1^{d_1}(x)p_2^{d_2}(x) \cdots p_m^{d_m}(x)$ . 证明:

$$d_i \deg p_i(x) = \dim \text{Ker}(p_i^{e_i}(\sigma)).$$

11. 设  $A \in \mathbb{Q}^{n \times n}$ ,  $A$  的特征多项式  $t_A(x)$  在  $\mathbb{Q}$  上不可约. 求证:  $A$  的有理标准型只有一个友矩阵, 而将  $A$  看作是  $\mathbb{C}$  上的矩阵, 其 Jordan 标准型是一个对角矩阵.