模论，林亚南，厦门大学数学科学学院， 2008 年 6 月

§5. 主理想整环上的有限生成模的分解定理

5.1 主理想整环上的有限生成模的分解为挠子模和自由子模的直和

定理 12. 设 M 是主理想整环 R 上的有限生成模，则

$$M = M_{tor} \oplus F,$$

其中 F 是自由 R- 模. 并且这种分解在同构意义下是唯一的，即若 $M = M' \oplus F'$, 其中 M' 是 M 的挠子模， F' 是自由 R- 模，则有 $M' = M_{tor}$, 且 $F \cong F'$.

证明: 因 M 是有限生成模, 故 M/M_{tor} 也是有限生成模. 而 M/M_{tor} 是无挠模, 由定理 11 知 M/M_{tor} 是自由模. 记 S 是 M/M_{tor} 的 R- 基.

考虑自然满同态 $\pi : M \to M/M_{tor}$. 对任意 $u \in S$, 取定一个 $u' \in M$ 使得 $\pi(u') = u$. 令 S' 为 M 中所有这样元素的集合，则 S' 是线性无关的. 令 $F := \langle S' \rangle$, 则 F 是 M 的子模且 $F \cong M/M_{tor}$. 下面证明 $M = M_{tor} \oplus F$.

事实上，对任意 $v \in M_{tor} \cap F = \mathrm{Ker}\pi \cap F$, 则 $v = \sum_{i=1}^{n} r_i u_i'$, 这里 $r_i \in R$, $u_i' \in S'$, $1 \le i \le n$, 且 $\pi(v) = 0$. 即 $0 = \sum_{i=1}^{n} r_i \pi(u_i') = \sum_{i=1}^{n} r_i u_i$, 故 $r_i = 0$, $1 \le i \le n$. 即 $v = 0$. 所以 $M_{tor} \cap F = 0$.

另一方面，令 $v \in M$, 则 $\pi(v) \in \mathrm{Im}\pi = M/M_{tor}$, 所以 $\pi(v) = \sum_{i=1}^{n} r_i u_i$, $r_i \in R$, $u_i \in S$, $1 \le i \le n$. 令 $u = \sum_{i=1}^{n} r_i u_i' \in F$, 则 $\pi(v-u) = 0$, 即 $v - u \in \mathrm{Ker}\pi = M_{tor}$. 这样 $v = (v-u) + u \in M_{tor} + F$. 这就证明了 $M = M_{tor} \oplus F$, 这里 $F \cong M/M_{tor}$ 是自由 R- 模.

若 $M = M' \oplus F'$, 其中 M' 是 M 的挠子模，F' 是 M 的自由子模. 由定义知 $M' \subseteq M_{tor}$. 设 $v \in M_{tor}$, 则 $v = v_1 + v_2$, 其中 $v_1 \in M'$, $v_2 \in F'$. 于是 $v_2 = v - v_1 \in M_{tor} \cap F' = 0$ (§4 习题 3). 所以 $M_{tor} \subseteq M'$, 故 $M_{tor} = M'$. 从而 $F' \cong M/M' \cong M/M_{tor} \cong F$. □

5.2 准素分解

设 M 是主理想整环 R 上的有限生成模， $v \in M$, 则 $\mathrm{ann}_R(v)$ 是 R 的理想, 因而是主理想. 称 $\mathrm{ann}_R(v)$ 的生成元为 v 的 **阶**. 称 $\mathrm{ann}_R(M)$ 的生成元为 M 的 **阶**. 显然 M(或 v) 的阶是相伴的.

定义 13. 主理想整环 R 上的模 M 称为 **准素** 的，若 $\mathrm{ann}_R(M) = \langle p^e \rangle$, 这里 p 是 R 的素元且 $e \in \mathbb{N}$.

注 9: 设 M 是主理想整环 R 上的有限生成挠模. 则 M 是准素的充分必要条件是存在 R 的素元 p, 使得 M 中任意元素的阶为 p 的次幂.

定理 13. 设 M 是主理想整环 R 上的有限生成挠模，设 M 的阶为

$$c = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_n^{e_n},$$

其中 p_i, $1 \le i \le n$, 为 r 中互不相伴的素元. 则有

$$M = M_{p_1^{e_1}} \oplus M_{p_2^{e_2}} \oplus \cdots \oplus M_{p_n^{e_n}},$$

其中 $M_{p_i^{e_i}} := \{v \in M \mid p_i^{e_i} v = 0 \}$ 为准素子模，阶为 $p_i^{e_i}$, $1 \le i \le n$. 进一步，这样的分解是唯一的，即若还有分解

$$M = M_{q_1^{d_1}} \oplus M_{q_2^{d_2}} \oplus \cdots \oplus M_{q_n^{d_n}},$$

其中 q_i, $1 \le i \le n$, 为互不相伴的素元， $M_{q_i^{d_i}}$ 为阶为 $q_i^{d_i}$ 的准素子模，则 $m = n$, 且适当调整下标 i, 可使 q_i 与 p_i 相伴且 $e_i = d_i$, $1 \le i \le n$.

证明: 设 $c = pq$, 且 p, q 互素. 令 $M_p := \{v \in M \mid pv = 0\}$, $M_q := \{v \in M \mid qv = 0\}$, 则 $M = M_p \oplus M_q$ (§2 习题 10(8)). 下面证明 $\mathrm{ann}_R(M_p) = \langle p \rangle$, $\mathrm{ann}_R(M_q) = \langle q \rangle$. 若 $rM_p = 0$, 则对任意的 $v \in M$, $v = v_1 + v_2 \in M_p \oplus M_q$, 有 $rqv = rqv_1 + rqv_2 = 0$. 故 $rq \in \mathrm{ann}_R(M) = \langle pq \rangle$. 这样 $p | rq$, 故 $p | r$. 因此 $\mathrm{ann}_R(M_p) = \langle p \rangle$. 同理 $\mathrm{ann}_R(M_q) = \langle q \rangle$.

若 $c = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_n^{e_n}$, 这里 p_i, $1 \le i \le n$ 为互不相伴的素元. 由上面讨论知 $M = M_{p_1^{e_1}} \oplus N$, $\mathrm{ann}_R(M_{p_1^{e_1}}) = \langle p_1^{e_1} \rangle$, $\mathrm{ann}_R(N) = \langle c/p_1^{e_1} \rangle$. 重复这一步骤，得到

$$M = M_{p_1^{e_1}} \oplus M_{p_2^{e_2}} \oplus \cdots M_{p_n^{e_n}},$$

且 $\mathrm{ann}_R(M_{p_i^{e_i}}) = \langle p_i^{e_i} \rangle$, $1 \le i \le n$.

下面证明分解的唯一性. 由 $M = M_{q_1^{d_1}} \oplus M_{q_2^{d_2}} \oplus \cdots \oplus M_{q_n^{d_n}}$ 知 $\mathrm{ann}_R(M) = \langle q_1^{d_1} q_2^{d_2} \cdots q_m^{d_m} \rangle$. 故 $p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_n^{e_n}$ 与 $q_1^{d_1} q_2^{d_2} \cdots q_m^{d_m}$ 相伴. 根据主理想整环的唯一分解定理知 $m = n$, 且适当调整下标可使 p_i 与 q_i 相伴， $e_i = d_i$, $1 \le i \le n$. □

5.3 循环分解

定理 14. 设 M 是主理想整环 R 上的有限生成准素模，其阶为 p^e, 则

$$M = N_1 \oplus N_2 \oplus \cdots \oplus N_n,$$

其中 N_i 为阶为 p^{e_i} 的循环子模， $1 \le i \le n$, 且满足 $e = e_1 \ge e_2 \ge \cdots \ge e_n \ge 1$.

证明：第一步，证明存在 $v_1 \in M$, 使得 $\mathrm{ann}_R(v_1) = \mathrm{ann}_R(M) = p^e$. 事实上，否则，对任意 $v \in M$, 有 $\mathrm{ann}_R(v) = \langle p^k \rangle$, $k < e$. 故 $p^{e-1} \in \mathrm{ann}_R(M) = \langle p^e \rangle$, 矛盾.

第二步，对 v_1, 存在子模 S_1, 使得 $M = \langle v_1 \rangle \oplus S_1$.

由于 M 有限生成，记 $M = \langle v_1, u_1, u_2, \cdots, u_k \rangle$. 对 k 作数学归纳. 若 $k = 0$, 令 $S_1 = 0$ 即可. 若结论对 k 成立，设 $M = \langle v_1, u_1, u_2, \cdots, u_k, u \rangle$, 由归纳假设

$$\langle v_1, u_1, u_2, \cdots, u_k \rangle = \langle v_1 \rangle \oplus S_0.$$

对任意的 $\alpha \in R$, 显然有 $M = \langle v_1, u_1, u_2, \cdots, u_k, u \rangle = \langle v_1, u_1, u_2, \cdots, u_k, u - \alpha v_1 \rangle$. 若能找到某个 $\alpha \in R$, 使得

$$\langle v_1 \rangle \cap \langle S_0, u - \alpha v_1 \rangle = 0,$$

则令 $S_1 := \langle S_0, u - \alpha v_1 \rangle$, 则 $M = \langle v_1 \rangle \oplus S_1$.

注意到 $\langle v_1 \rangle \cap \langle S_0, u - \alpha v_1 \rangle = 0$ 等价于对任意的 $r \in R$, $s_0 \in S_0$,

$$r(u - \alpha v_1) + s_0 \in \langle v_1 \rangle, \text{则有} r(u - \alpha v_1) + s_0 = 0,$$

等价于

$$ru \in \langle v_1 \rangle \oplus S_0, \text{则有} r(u - \alpha v_1) \in S_0. \quad (*)$$

令

$$I := \{ r \in R \mid ru \in \langle v_1 \rangle \oplus S_0 \},$$

则 I 是 R 的理想, 故为主理想. 因为 $p^e \in I$, 所以 $I = \langle p^d \rangle$, $d \le e$. 于是 $ru \in \langle v_1 \rangle \oplus S_0$ 等价于 $r = qp^d, q \in R$ ，而 $r(u - \alpha v_1) \in S_0$ 等价于 $qp^d(u - \alpha v_1) \in S_0$. 所以，若存在 $\alpha \in R$, 使得

$$p^d(u - \alpha v_1) \in S_0, \quad (**)$$

则 $(*)$ 得证.

因为 $p^d \in I$, 所以 $p^d u = bv_1 + s_0$, 其中 $b \in R$, $s_0 \in S_0$. 所以 $(**)$ 可表为 $bv_1 + s_0 + p^d \alpha v_1 \in S_0$, 即 $(b - p^d \alpha) v_1 \in S_0$. 而此式成立当且仅当 $(b - p^d \alpha) = 0$, 当且仅当 $p^d | b$. 根据 $p^d u = bv_1 + s_0$, 有 $0 = p^e u = p^{e-d} p^d u = p^{e-d} b v_1 + p^{e-d} s_0$. 因为 $\langle v_1 \rangle \cap S_0 = 0$, 所以 $p^{e-d} b v_1 = 0$. 又因为 v_1 的阶为 p^e, 所以 $p^d | b$.

第三步，由于 $M = \langle v_1 \rangle \oplus S_1$, 则 S_1 也是 R 上有限生成准素模，其阶为 p^{e_2}, $e_2 \le e_1 = e$. 由第一步知存在 v_2, 满足

$$M = \langle v_1 \rangle \oplus \langle v_2 \rangle \oplus S_2,$$

且 $\mathrm{ann}_R(v_2) = \langle p^{e_2} \rangle$, $e_2 \le e_1$. 这样继续下去，得到一个子模升链

$$\langle v_1 \rangle \subseteq \langle v_1 \rangle \oplus \langle v_2 \rangle \subseteq \cdots,$$

由于 R 是主理想整环, M 是有限生成，由定理 7 知 M 是 Norther 模，故满足升链条件．故有

$$M = \langle v_1 \rangle \oplus \langle v_2 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle v_n \rangle,$$

令 $N_i = \langle v_i \rangle$, 则 $M = N_1 \oplus N_2 \oplus \cdots \oplus N_n$, 且 $\operatorname{ann}_R(N_i) = \operatorname{ann}_R(v_i) = \langle p^{e_i} \rangle$, $1 \leq i \leq n$, 且 $e = e_1 \geq e_2 \geq \cdots \geq e_n \geq 1$. □

注 10: 下面利用 Zorn 引理给出定理 14 的第二步 " 对 v_1, 存在子模 S_1, 使得 $M = \langle v_1 \rangle \oplus S_1$" 的另外一种证明方法.

证明：令

$$\Omega := \{M\text{的子模}S \mid \langle v_1 \rangle \cap S = 0\},$$

则 Ω 对于集合的包含关系构成非空的偏序集．易证 Ω 中的任意子模链有上界．根据 Zorn 引理， Ω 存在极大元 S_1, 满足 $\langle v_1 \rangle \cap S_1 = 0$, 因而 $\langle v_1 \rangle + S_1 = \langle v_1 \rangle \oplus S_1$.

我们断言 $M = \langle v_1 \rangle \oplus S_1$. 否则，设 $\alpha \in M \backslash (\langle v_1 \rangle \oplus S_1)$. 因为 $p^e \alpha = 0 \in \langle v_1 \rangle \oplus S_1$, 可设存在 $d \in \mathbb{N}$, $d \leq e$, 满足

$$p^d \alpha \in \langle v_1 \rangle \oplus S_1, \quad p^{d-1} \alpha \notin \langle v_1 \rangle \oplus S_1.$$

记 $p^d \alpha = bv_1 + s$, $b \in R$, $s \in S_1$. 则 $0 = p^e \alpha = p^{e-d} p^d \alpha = p^{e-d} bv_1 + p^{e-d} s$. 所以 $p^{e-d} bv_1 = 0$. 因为 v_1 的阶为 p^e, 所以 $b = b_1 p^d$, $b_1 \in R$. 这样， $p^d(\alpha - b_1 v_1) = p^d \alpha - bv_1 = s \in S_1$, 并且 $p^{d-1}(\alpha - b_1 v_1) \notin S_1$ (否则与 $p^{d-1}\alpha \notin \langle v_1 \rangle \oplus S_1$ 矛盾). 特别地， $\alpha - b_1 v_1 \notin S_1$. 由 S_1 的极大性知 $(\langle p^{d-1}(\alpha - b_1 v_1) \rangle + S_1) \cap \langle v_1 \rangle \neq 0$. 所以存在

$$0 \neq cp^{d-1}(\alpha - b_1 v_1) + s \in \langle v \rangle, \quad c \in R, s \in S_1,$$

即 $cp^{d-1}(\alpha - b_1 v_1) \in \langle v_1 \rangle \oplus S_1$. 我们指出 $p \nmid c$. 否则 $cp^{d-1}(\alpha - b_1 v_1) \in S$, 进而 $cp^{d-1}(\alpha - b_1 v_1) + s \in \langle v_1 \rangle \cap S_1 = 0$, 矛盾．故存在 $s, t \in R$, 使得 $sc + tp = 1$. 所以 $p^{d-1}(\alpha - b_1 v_1) = scp^{d-1}(\alpha - b_1 v_1) + tp^d(\alpha - b_1 v_1) \in \langle v_1 \rangle \oplus S_1$, 进而 $p^{d-1}\alpha \in \langle v_1 \rangle \oplus S_1$, 矛盾. □

下面证明循环分解的唯一性.

定理 15. 设 M 是主理想整环 R 上非零的有限生成准素模，其阶为 p^e, 设 M 可分解为

$$M = N_1 \oplus N_2 \oplus \cdots \oplus N_n,$$

其中 N_i 为阶为 p^{e_i} 的非零循环子模， $1 \leq i \leq n$, 且满足 $e_1 \geq e_2 \geq \cdots \geq e_n \geq 1$. 若 M 还可分解为

$$M = N'_1 \oplus N'_2 \oplus \cdots \oplus N'_m,$$

其中 N_i' 为阶为 p^{d_i} 的非零循环子模， $1 \le i \le m$, 且满足 $d_1 \ge d_2 \ge \cdots \ge d_m \ge 1$, 则有 $n = m$, 且 $e_i = d_i$, $1 \le i \le n$.

证明: 先证 $m = n$. 设 W 是 R- 模. 记 $M_p := \{u \in M \mid pu = 0\}$. 根据 §2 的习题 10, 知 M_p 是域 $R/\langle p\rangle$ 的线性空间，并且有

$$M_p = (N_1)_p \oplus (N_2)_p \oplus \cdots \oplus (N_n)_p$$

和

$$M_p = (N_1')_p \oplus (N_2')_p \oplus \cdots \oplus (N_n')_p.$$

由于 N_i, N_i' 均为循环子模, 故 $(N_i)_p, (N_i')_p$ 为域 $R/\langle p\rangle$ 上的一维线性空间, 故 $m = n$.

下面对 e_1 做数学归纳证明 $e_i = d_i$, $1 \le i \le n$. 设 $e_1 = 1$, 则 $e_i = 1$, $1 \le i \le n$. 故 $pM = 0$. 若 $d_i > 1$, 记 $N_1' = \langle w\rangle$, 则 $pw \ne 0$, 矛盾. 所以 $d_i = 1$, $1 \le i \le n$.

假设结论当 $e_1 \le k-1$ 时成立. 现在考虑 $e_1 = k$ 的情况. 设

$$(e_1, e_2, \cdots, e_n) = (e_1, \cdots, e_s, 1, \cdots, 1), \quad e_s > 1,$$

$$(d_1, d_2, \cdots, d_n) = (d_1, \cdots, d_t, 1, \cdots, 1), \quad d_t > 1,$$

则

$$pM = pN_1 \oplus pN_2 \oplus \cdots \oplus pN_s$$

及

$$pM = pN_1' \oplus pN_2' \oplus \cdots \oplus pN_t'.$$

易见 pN_i 是 M 的循环子模及 $\mathrm{ann}_R(pN_i) = \langle p^{e_i-1}\rangle$. 事实上,

$$pN_i = \{pu \mid u \in N_i\} = \{prv_i \mid r \in R\} = \{r(pv_i) \mid r \in R\} = \langle pv_i\rangle,$$

且 $\mathrm{ann}_R(pN_i) = \mathrm{ann}_R(pv_i) = \langle p^{e_i-1}\rangle$, $1 \le i \le n$. 同理 pN_i' 是的 M 循环子模且 $\mathrm{ann}_R(pN_i') = \langle p^{d_i-1}\rangle$. 特别地， $\mathrm{ann}_R(pN_1) = \langle p^{e_1-1}\rangle$. 由归纳假设, 有 $s = t$ 且 $e_i = d_i$, $1 \le i \le s$. □

注 11: 设 N_i 为阶为 p^{e_i} 的非零循环模，易证 $N_i \cong R/\langle p^{e_i}\rangle$. 故设 M 是主理想整环 R 上的有限生成准素模，其阶为 p^e, 则有

$$M \cong R/\langle p_1^{e_1}\rangle \oplus R/\langle p_2^{e_2}\rangle \oplus \cdots \oplus R/\langle p_n^{e_n}\rangle,$$

$e_1 \ge e_2 \ge \cdots \ge e_n \ge 1$.

5.4 结论

总结前面的定理 12- 定理 15, 我们有

定理 16. **(初等因子形式)** 设 M 是主理想整环 R 上的有限生成模，则

$$M = M_{tor} \oplus F,$$

这里 M_{tor} 是 M 中所有挠元的集合， F 是自由 R- 模，其秩由 M 唯一确定.

若 M_{tor} 的阶为

$$c = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_n^{e_n},$$

这里 p_i, $1 \le i \le n$, 为互不相伴的素元，则

$$M_{tor} = M_{p_1^{e_1}} \oplus M_{p_2^{e_2}} \oplus \cdots M_{p_n^{e_n}},$$

这里 $M_{p_i^{e_i}} := \{v \in M \mid p_i^{e_i} v = 0\}$ 为 M 的准素子模，其阶为 $p_i^{e_i}$, $1 \le i \le n$.

每个 $M_{p_i^{e_i}}$ 可分解为循环子模的直和

$$M_{p_i^{e_i}} = N_{i1} \oplus N_{i2} \oplus \cdots \oplus N_{ik_i},$$

这里 N_{ij} 的阶为 $p_i^{e_{ij}}$, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le k_i$, 且 $e_i = e_{i1} \ge e_{i2} \ge \cdots \ge e_{ik_i}$, $1 \le i \le n$. 这里 $p_i^{e_{ij}}$, $1 \le i \le n$, $1 \le i \le k_i$, 称为的 M 的 **初等因子**. 在不考虑相伴情况下， M 的初等因子由 M 唯一确定. 于是， M 可以分解为循环子模及一个自由子模的直和

$$M = (N_{11} \oplus N_{12} \oplus \cdots \oplus N_{1k_1}) \oplus \cdots \oplus (N_{n1} \oplus N_{n2} \oplus \cdots \oplus N_{nk_n}) \oplus F. \qquad \square$$

注 12: M 可以分解为 R 的若干商环及一个自由子模的直和

$$M = R/\langle p_1^{e_{11}} \rangle \oplus R/\langle p_1^{e_{12}} \rangle \oplus \cdots \oplus R/\langle p_1^{e_{1k_1}} \rangle \oplus \cdots \oplus R/\langle p_1^{e_{n1}} \rangle \oplus R/\langle p_1^{e_{n2}} \rangle \oplus \cdots \oplus R/\langle p_1^{e_{nk_n}} \rangle \oplus F.$$

引理 2. 设 R 是主理想整环, 设 M_1, M_2 是 R- 模 M 的循环子模, 且 $\mathrm{ann}_R(M_1) = \langle a \rangle$, $\mathrm{ann}_R(M_2) = \langle b \rangle$. 设 1 是 a, b 的最大公因子. 则

(1) $M_1 \oplus M_2$ 是循环子模;

(2) $\mathrm{ann}_R(M_1 \oplus M_2) = \langle ab \rangle$.

证明: 留做习题. $\square$

定理 17. **(不变因子形式)** 设 M 是主理想整环 R 上的有限生成模，则

$$M = L_1 \oplus L_2 \oplus \cdots \oplus L_m \oplus F,$$

这里 F 是自由 R- 模，其秩由 M 唯一确定. L_i 是 M 的循环子模，其阶为 q_i, $1 \le i \le m$, 且 $q_{i+1} | q_i$, $1 \le i \le m-1$.

将 M 的循环子模直和项 L_i 的阶 q_i, $1 \le i \le m$, 称为的 M 的 **不变因子**. 在不考虑相伴情况下， M 的不变因子由 M 唯一确定.

证明：在定理 16 中，令

$$L_1 := N_{11} \oplus N_{21} \oplus \cdots \oplus N_{n1}.$$

根据引理 2, L_1 是循环子模其阶为 $q_1 := \prod_{i=1}^n p_i^{e_{i1}}$.

类似可以定义 $L_2, \cdots, L_m$, 这里 $m := \max\{k_i\}$. □

习题：

1. 设 R 是主理想整环， M 是 R- 模. 设 p 是 R 中的素元. 证明：

$$M_p \subseteq M_{p^2} \subseteq \cdots \subseteq M_{p^n} \subseteq \cdots,$$

且 $\cup_{i=1}^{\infty} M_{p^i}$ 是 M 的子模.

2. 在准素分解定理 (定理 14) 中,

(1) 设 q 是与 p_i, $1 \le i \le n$, 互不相伴的素元，则 $M_{q^e} = 0$, $e \in \mathbb{N}$;

(2) $\cup_{j=1}^{\infty} M_{p_i^j} = M_{p_i^{e_i}}$, $1 \le i \le n$.

3. 证明引理 2.

4. 设 M 是主理想整环 R 上有限生成挠模. 证明： M 不能分解为两个非零子模的直和的充分必要条件是 $M = \langle v \rangle$, 且 $\mathrm{ann}_R(v) = \langle p^e \rangle$, 这里 p 为 R 的素元，且 $e \ge 1$.

5. 设 M 是主理想整环 R 上有限生成无挠模. 证明： M 不能分解为两个非零子模的直和的充分必要条件是 M 是循环模，即 $M \cong R$.

6. 设 M 是主理想整环 R 上的有限生成挠模. 求证： M 是单模 (即没有非平凡子模) 的充分必要条件是 $M = \langle v \rangle$, 且 $\mathrm{ann}_R(v) = \langle p \rangle$, 这里 p 为 R 的一个素元.

7. 设 M 是主理想整环 R 上的挠模. 求证：M 是循环模的充分必要条件是存在 R 中互不相伴的素元 $p_1, p_2, \cdots, p_m$ 及正整数 $e_1, e_2, \cdots, e_m$, 使得 $M \cong \oplus_{i=1}^m R/\langle p_i^{e_i} \rangle$.

8. (1) 设 M, N, L 是主理想整环 R 上的有限生成模. 求证：若 $M \oplus N \cong M \oplus L$, 则 $N \cong L$.

(2) 当 M 不是有限生成时， (1) 的结论不成立. 考虑 $\theta : \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \oplus \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \oplus 0$, $(\{a_i\}, a) \mapsto (\{b_i\}, 0)$, 其中 $b_1 = a, b_i = a_{i-1}$, $i \ge 2$. 证明 θ 是 $\mathbb{Z}$- 同构.