模论讲义，林亚南，厦门大学数学科学学院，2008 年 6 月

§4. 主理想整环上的自由模

本节总设 R 是有单位元的交换环.

4.1 自由模

定义 9. 设 S 是 R- 模 M 的子集，称 S 是 R-**线性无关** 的，如果对 S 的任意有限子集 $u_1, u_2, \cdots, u_n \in S$, 由 $r_1u_1 + \cdots + r_nu_n = 0$, $r_i \in R$, $1 \le i \le n$ 可导出 $r_i = 0$, $1 \le i \le n$. 若集合 S 不是线性无关的，则称为 **线性相关**.

定义 10. 设 M 是 R- 模，M 的子集 S 称为 M 的 **基**, 若
(1) S 是 R- 线性无关的；
(2) $M = \langle S \rangle$.

注 4: 设 S 是 R- 模 M 的基，则 S 是 M 的极小生成集，是极大线性无关子集.

命题 6. 设 S 是 R- 模 M 的子集，则 S 是 M 的基的充分必要条件是对对于任意的 $v \in M$, 存在 $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\} \subseteq S$, 使得 $v = r_1u_1 + \cdots + r_nu_n, r_i \in R, 1 \le i \le n$, 且表示法唯一.

证明：留作练习.　□

注 5: 设 M 是 R- 模，$u_1, u_2, \cdots, u_n$ 线性无关，$u_1, u_2, \cdots, u_n, u$ 线性相关，未必存在 $r_1, \cdots, r_n \in R$, 使得 $u = \sum\limits_{i=1}^{n} r_iu_i$.

定义 11. R- 模 M 称为 **自由模**, 若 M 有 R- 基. 若 S 是 M 的 R- 基，则称 M 在 S 上自由，M 的基的基数称为 M 的 **秩**, 记为 $\mathrm{rank}(M)$.

例 7: (1) R 是自由 R- 模；
(2) R^n 是自由 R- 模，有 R- 基 $S = \{(1, 0, \cdots, 0), (0, 1, 0, \cdots, 0), \cdots, (0, 0, \cdots, 0, 1)\}$, $\mathrm{rank}(R^n) = n$.

例 8: $\mathbb{Z}_6$ 作为 $\mathbb{Z}$- 模不是自由模，但是作为 $\mathbb{Z}_6$- 模是自由模.

因为 R 是有单位元的交换环，所以 R 一定有极大理想 I, 并且 R/I 是域. 下面定理证明了秩的定义的合理性.

命题 7. 设 R 是带有单位元 1 的交换环, M 是自由 R- 模, 则 M 的任意两个基的基数相等.

证明: R 有极大理想 I, 且 R/I 是域. 令

$$IM = \{a_1v_1 + \cdots + a_nv_n \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in I, v_i \in M, 1 \leq i \leq n\},$$

则 IM 是 M 的一个子模, 且商模 M/IM 是 R/I- 模, 其数乘定义为 $(r+I)(u+IM) = ru + IM$(§2 习题 7).

设 S 是 M 的 R- 基, 定义 $S' := \{u_i+IM \mid u_i \in S\}$, $\varphi : u_i \mapsto u_i+IM$, 则显然 φ 是集合 S 到集合 S' 的满映射. 为了证明 φ 是单映射, 设 $u_i \neq u_j \in S$, $u_i + IM = u_j + IM$, 则 $u_i - u_j \in IM$. 故存在 $a_k \in I, v_k \in M$, $1 \leq k \leq n$, 使得

$$u_i - u_j = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n.$$

对 k, $1 \leq k \leq n$, 设 $v_k = r_{ik}u_i + \sum\limits_{l \neq i} r_{lk}u_l$, 其中 $r_{ik}, r_{lk} \in R$, $u_l \in S$. 则由于 S 是 R-基, 对比 u_i 的系数知 $1 = \sum\limits_{k=1}^{n} a_kr_{ik}$. 因 $a_i \in I, 1 \leq i \leq n$, 故 $1 \in I$ 与 I 是极大理想矛盾. 这样, φ 建立了 S 和 S' 的一一对应.

下面证明 S' 是 M/IM 的 R/I- 基. 首先, 由于 $M = \langle S \rangle$, 故 $M/IM = \langle S' \rangle$. 为证 S' 线性无关, 设 $\sum\limits_{i=1}^{n}(r_i + I)(u_i + IM) = 0$. 则 $\sum\limits_{i=1}^{n}(r_iu_i + IM) = 0$. 故有 $\sum\limits_{i=1}^{n} r_iu_i \in IM$. 所以 $\sum\limits_{i=1}^{n} r_iu_i = \sum\limits_{j=1}^{m} a_jv_j, a_i \in I$, $v_j \in S$. 由于 $u_i, v_j \in S$, 对比系数知 $r_i \in I, 1 \leq i \leq n$. 于是 $r_i + I = 0 + I, 1 \leq i \leq n$. 故 S' 是 R/I- 线性无关.

这样, S 的基数 $=$ S' 的基数 $= \dim_{R/I}(M/IM)$. 因而 M 的秩与 S 的选取无关. □

定理 9. 设 M, N 是自由 R- 模, 则 $M \cong N$ 的充分必要条件是 $\mathrm{rank}(M) = \mathrm{rank}(N)$.

证明: 设 M, N 是两个自由 R- 模, 若 $\varphi : M \to N$ 是 R- 模同构, 设 S 为 M 的 R- 基, 则 $\varphi(S)$ 是 N 的 R- 基. 由于 φ 是双射, 故 $\mathrm{rank}(M) = \mathrm{rank}(N)$. 反之, 若 $\mathrm{rank}(M) = \mathrm{rank}(N)$. 设 S 是 M 的 R- 基, T 是 N 的 R- 基. 则存在双射 $\varphi : S \to T$, 可线性扩充为 R- 模同构 $\varphi : M \cong N$. □

注 6: 设 M 是自由 R- 模, 且 $\mathrm{rank}(M) = n$. 则有 $M \cong R^n$.

注 7: 设 M 是 R- 模, $S = \{u_1, \cdots, u_n\} \subseteq M$ 且 S 是 R- 线性无关, 则 $\langle S \rangle$ 是自由模, S 是 $\langle S \rangle$ 的 R- 基, $\mathrm{rank}(\langle S \rangle) = n$.

4.2 主理想整环上的自由模

一般地，一个自由 R- 模的子模未必是自由模.

例 9. $\mathbb{Z}_6$ 是 $\mathbb{Z}_6$- 自由模. 设 $N := \{\overline{0}, \overline{3}\}$. 则 N 是 $\mathbb{Z}_6$ 的子模但不是自由模.

但是对于主理想整环，我们有如下结论.

定理 10. 设 R 是主理想整环， M 是自由 R- 模且 $\mathrm{rank}(M) = n$. 则 M 的任意子模 N 也是自由的且 $\mathrm{rank}(N) \le n$.

证明: 由定理 9, 可设 $M = R^n$. 对 n 作归纳法.

当 $n = 1$ 时， R 的任意子模 N 就是 R 的理想, 因 R 为主理想整环, 故 $N = \langle a \rangle$. 令 $\varphi : R \to N$, $r \mapsto ra$. 易证 φ 是 R- 模同态， φ 是满. 因 R 无零因子，故 φ 是单的. 故 $N \cong R$, 即 N 是自由的， $\mathrm{rank}(N) = 1 = \mathrm{rank}(R)$.

假设当 $k < n$ 时， R^k 的子模是自由的. 对于 R^n 的子模 N. 考虑

$$N_1 = \{r \in N \mid r = (r_1, r_2, \cdots, r_{n-1}, 0), r_i \in R\},$$

$$N_2 = \{(0, \cdots, 0, r_n) \mid (r_1, r_2, \cdots, r_{n-1}, r_n) \in N, r_i \in R\},$$

则 N_1 同构于 R^{n-1} 的子模， N_2 是 R 的子模 (§2. 习题 9). 由归纳假设， N_1 是自由的且 $\mathrm{rank}(N_1) \le n - 1$. 设 $S = \{u_1, \cdots, u_s\}$ 是 N_1 的 R- 基， $s \le n - 1$. 若 $N_1 = 0$, 则 $S = \emptyset$. 若 $N_2 = 0$, 则 N 中任一元素的第 n 个分量为 0. 则 $N = N_1$ 是自由的. 若 $N_2 \ne 0$, 则 $\mathrm{rank}(N_2) = 1$. 设 N_2 的 R- 基为 $(0, \cdots, 0, a_n), a_n \ne 0$, 且存在 $v = (a_1, \cdots, a_n) \in N$.

下面证明 $S' = \{u_1, \cdots, u_s, v\}$ 是 N 的 R- 基. 首先, 对任意 $u = (b_1, b_2, \cdots, b_n) \in N$, 则 $(0, 0, \cdots, 0, b_n) \in N_2$. 故存在 $t \in R$,$b_n = ta_n$. 故有 $u - tv \in N_1$, 即 $u - tv \in S$. 故 $u \in S'$, 这就证明 $M = \langle S' \rangle$. 再证 S' 是 R- 线性无关的. 令 $t_0 v + t_1 u_1 + \cdots + t_s u_s = 0$, 则有 $t_0 v = -(t_1 u_1 + \cdots + t_s u_s)$, 比较最后一个分量，得到 $t_0 = 0$, 且 $t_1 u_1 + \cdots + t_s u_s = 0$. 再由 S 是 R- 基得到 $t_i = 0, 1 \le i \le s$. 故 S' 是 R- 线性无关的. 所以 S' 是 N 的基, 且 $\mathrm{rank}(N) \le n$. □

定义 12. 设 R 为整环， M 是一个 R- 模. 对 $v \in M$, 若存在非零元素 $r \in R$, 使得 $rv = 0$. 则称 v 是 M 的一个 **挠元**. 一个 R- 模称为 **无挠模**, 如果 M 没有非零挠元. 一个 R- 模称为 **挠模**, 如果 M 的所有元素都是挠元.

引理 1. 设 R 为整环， M 是一个 R- 模. 令 $M_{tor} := \{M$ 中的挠元 $\}$ 则
(1) M_{tor} 是 M 的子模;
(2) M/M_{tor} 是无挠模.

证明: 由定义直接得到. □

例 10: (1) 域 F 上的模是无挠模;

(2) $\mathbb{Z}_6$ 作为 $\mathbb{Z}$- 模是挠模;

(3) 整环上任意自由模是无挠的;

(4) 设 σ 是数域 F 上 n 维线性空间 V 的线性变换, V 作为 $F[x]$- 模,其数乘定义为 $f(x)v := f(\sigma)(v)$. 则 V 是 $F[x]$- 挠模.

定理 11. 设 M 是主理想整环 R 上的模. 如果 M 是有限生成且无挠的,则 M 是自由的且 $\mathrm{rank}(M) < \infty$.

证明: 因为 M 是有限生成的,设 $M = \langle v_1, v_2, \cdots, v_n\rangle$. 在生成元中取极大线性无关子集 $S = \{u_1, \cdots, u_k\}$, 重写 $M = \langle u_1, \cdots, u_k, v_1, \cdots, v_{n-k}\rangle$. 对 $v_j, 1 \le j \le n-k$, 由于 $u_1, \cdots, u_k, v_i$ 线性相关, 故存在 $a_i \neq 0$, 及 $r_1^{(i)}, \cdots, r_k^{(i)}$ 使得 $a_iv_i+r_1^{(i)}u_1+\cdots+r_k^{(i)}u_k = 0$, 即 $a_iv_i \in \langle S\rangle$. 令 $a = a_1a_2\cdots a_{n-k}$, 则 $av_i \in \langle S\rangle, 1 \le i \le n-k$. 故 $aM = \{av|v \in M\}$ 是 $\langle S\rangle$ 的子模. 由于 $\langle S\rangle$ 是自由模,由定理 10, aM 也是自由模. 令 $\varphi : M \to aM$, $v \mapsto av$ 则 φ 是满的 R- 模同态. 因为 M 是无挠的,所以 φ 单. 故 $aM \simeq M$,M 是自由模. □

注 8: 定理中的条件" 有限生成 "是必需的. $\mathbb{Q}$ 作为 $\mathbb{Z}$- 模是无挠的,但任意两个有理数是 $\mathbb{Z}$- 线性相关的.

习题

1. 证明命题 5.

2. 证明例 10 中的 (3)(4).

3. 设 M 是整环 R 上的模, N,T 是 M 的子模, N 是挠模, T 是自由模,则 $N \cap T = 0$.

4. (1) 设 M 是 R- 模, $v \in M$, 定义 $\mathrm{ann}_R(v) := \{r \in R \mid rv = 0\}$, $\mathrm{ann}_R(M) := \{r \in R \mid rv = 0, 对\ \forall v \in M\}$. 则 $\mathrm{ann}_R(v)$, $\mathrm{ann}_R(M)$ 是 R 的理想,分别称为 v 的零化子和的 M 零化子.

(2) 设 M 是 R- 模, $v \in M$, 则 $\mathrm{ann}_R(M) \subseteq \mathrm{ann}_R(v)$. 特别地,当 $M = \langle v\rangle$ 时, $\mathrm{ann}_R(M) = \mathrm{ann}_R(v)$;

(3) 设 M 是有限生成挠模,记 $M = \langle v_1, v_2, \cdots, v_s\rangle$, 则 $\mathrm{ann}_R(M) = \cap_{i=1}^{s}\mathrm{ann}_R(v_i)$;

(4) 设 M 是 R- 模,则 M 也是 $R/\mathrm{ann}_R(M)$- 模. 且 $\mathrm{ann}_{R/\mathrm{ann}_R(M)}(M) = 0$;

(5) 设 M 是 R- 模, $v \in M$. 则 $\varphi : R \to \langle v\rangle$, $r \mapsto rv$ 是 R- 模满同态,且 $\mathrm{Ker}\varphi = \mathrm{ann}_R(v)$. 所以 $\langle v\rangle \cong R/\mathrm{ann}_R(v)$. 故当 v 是非挠元时, $R \cong \langle v\rangle$.

(6) 设 R 是主理想整环, $M = M_1 \oplus M_2$. 设 $\mathrm{ann}_R(M_1) = \langle a\rangle$, $\mathrm{ann}_R(M_2) = \langle b\rangle$, 则 $\mathrm{ann}_R(M) = \langle c\rangle$, 其中 c 是 a, b 的最小公倍子. 特别地, 当 a, b 互素时, $\mathrm{ann}_R(M) = \langle ab\rangle$;

(7) 设 R 是主理想整环， M 是 R- 模， $\mathrm{ann}_R(M) = \langle p^e \rangle$, 其中 p 是素元， $e \in \mathbb{N}$. 设 N 是 M 的子模，则 $ann_R(N) = \langle p^l \rangle$, $l \leq e$.

5. (1) 写出环 R 作为 R- 模是无挠模的充分必要条件；

(2) 求证：有限 Abel 群作为 $\mathbb{Z}$- 模是挠模；

(3) 求证：环 R 上无挠循环模必同构于 R- 模 R.

6. 设 R 是主理想整环， M 是 R- 模， $p \in \mathrm{ann}(M)$, 则

(1) M 是 $R/\langle p \rangle$- 模，其数乘定义为 $(r + \langle p \rangle)v := rv$;

(2) 当 p 是素元时， M 是域 $R/\langle p \rangle$ 上的线性空间；

(3) 设 p 为 R 中的素元， $v \in M$ 且 $\mathrm{ann}_R(v) = \langle p^e \rangle$. 记 $\langle v \rangle_p = \{u \in \langle v \rangle \mid pu = 0\}$. 求证： $\langle v \rangle_p$ 是 $R/\langle p \rangle$ 上的一维线性空间.

*7. 设 R 是主理想整环， M 是有限生成 R- 模，则下列命题等价：

(1) M 是自由 R- 模；

(2) M 是投射 R- 模；

(3) M 是平坦 R- 模；

(4) M 是无挠 R- 模.