

模论讲义, 林亚南, 厦门大学数学科学学院, 2008 年 6 月

§3. Noether 模

3.1. Noether 模

定义 7. 一个 R -模 M 称为 **Noether 模**, 如果它满足子模升链条件:

对 M 任意子模序列 $M_1 \subseteq M_2 \subseteq M_3 \subseteq \cdots \subseteq M_n \subseteq \cdots$, 总存在 $j \in \mathbb{N}$, 使得对于任意的 $l \in \mathbb{N}$, 都有 $M_j = M_{j+l}$.

定理 6. R -模 M 是 Noether 模的充分必要条件是 M 每个子模是有限生成的.

证明: 充分性. 若 M 的每个子模是有限生成的, 考虑的子模序列 $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots$, 易证 $\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$ 是 M 的子模, 故是有限生成的. 设 $\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i = \langle u_1, u_2, \cdots, u_n \rangle$, 因 $u_i \in \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$, 设 $u_i \in M_{j_i}$, 令 $j = \max\{j_1, j_2, \cdots, j_n\}$, 则 $u_i \in M_j, 1 \leq i \leq n$. 故 $\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i \subseteq M_j \subseteq M_{j+1} \subseteq \cdots \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$, 即存在 j , 使得对任意的 $l \in \mathbb{N}$, 都有 $M_j = M_{j+l}$.

必要性. 设 M 是 Noether 模, N 为 M 的子模. 取 $u_1 \in N$. 考虑 $M_1 = \langle u_1 \rangle \subseteq N$. 若 $M_1 = N$, 则 N 是有限生成. 若 $M_1 \neq N$, 取 $u_2 \in N \setminus M_1$, 令 $M_2 = \langle u_1, u_2 \rangle$. 若 $M_2 = N$, 则 N 有限生成. 若 $M_2 \neq N$, 取 $u_3 \in N \setminus M_2$. 令 $M_3 = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$. 继续下去, 得到 N 的有限生成子模升链 $M_1 \subseteq M_2 \subseteq M_3 \subseteq \cdots$. 若不存在 $M_j = N$, 则得到一个真包含的升链, 与题设矛盾. 故存在 $j \in \mathbb{N}$, 使得 $M_j = N$, 即 $M = \langle u_1, u_2, \cdots, u_j \rangle$. 即 N 是有限生成. \square

例 5: (1) \mathbb{Z} 作为 \mathbb{Z} -模是 Noether 模;

(2) 设 p 为任意给定的素数. 令

$$M := \left\{ \frac{m}{p^k} \mid m \in \mathbb{Z}, k \text{ 是任意非负整数} \right\},$$

则 M 是 \mathbb{Z} -模, 且不是 Noether 模. 事实上, 令 $M_i := \left\{ \frac{m}{p^i} \mid m \in \mathbb{Z} \right\}$, 则有无穷升链 $\subsetneq M_1 \subsetneq M_2 \subsetneq \cdots \subsetneq M_n \subsetneq \cdots$.

3.2 Noether 环

定义 8. 环 R 称为 **Noether 环**, 如果 R 作为 R -模是 Noether 模, 即环 R 满足理想升链条件: 对 R 的任意理想列 $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots \subseteq I_n \subseteq \cdots$, 总存在 $j \in \mathbb{N}$, 使得对任意的 $l \in \mathbb{N}$, 都有 $I_j = I_{j+l}$.

注 3. 由定义知环 R 是 Noether 环的充分必要条件是 R 的每个理想是有限生成的.

例 6: (1) 域 F 是 Noether 环, 因为 F 只有两个理想 0 与 F ;
 (2) 主理想整环是 Noether 环.

定理 7: 环 R 是 Noether 环充分必要条件是任意有限生成的 R -模是 Noether 模.

证明: 充分性. 由定义.

必要性. 设 M 是有限生成 R -模, N 是 M 的子模. 由定理 6 只要证明 N 是有限生成的. 设 $M = \langle u_1, u_2, \dots, u_n \rangle$. 则有 R -模满同态

$$\varphi: R^n \rightarrow M, (r_1, r_2, \dots, r_n) \mapsto \sum_{i=1}^n r_i u_i,$$

且 $\varphi^{-1}(N)$ 是 R^n 的一个子模且 $\varphi\varphi^{-1}(N) = N$. 如果 R^n 的每个子模都是有限生成的, 则 $\varphi^{-1}(N)$ 是有限生成的, 记 $\varphi^{-1}(N) = \langle s_1, s_2, \dots, s_t \rangle$. 于是对任意 $u \in N$, 存在 $s \in \varphi^{-1}(N)$, 使 $u = \varphi(s)$. 设 $s = a_1 s_1 + a_2 s_2 + \dots + a_t s_t$, 则

$$u = \varphi(s) = a_1 \varphi(s_1) + a_2 \varphi(s_2) + \dots + a_t \varphi(s_t),$$

即 $N = \langle \varphi(s_1), \varphi(s_2), \dots, \varphi(s_t) \rangle$.

下面证明 R^n 的每个子模是有限生成的. 对 n 作数学归纳法. 当 $n = 1$ 时, R 是 Noether 环, 命题成立. 假设对任意的 $k, 1 \leq k \leq n, R^k$ 的每个子模是有限生成的. 设 N 是 R^n 的子模. 令

$$N_1 = \{r \in N \mid r = (r_1, r_2, \dots, r_{n-1}, 0), r_i \in R\},$$

$$N_2 = \{(0, \dots, 0, r_n) \mid (r_1, r_2, \dots, r_{n-1}, r_n) \in N, r_i \in R\},$$

则 N_1 同构于 R^{n-1} 的一个子模, N_2 同构于 R 的子模 (§2. 习题 9). 由归纳假设, $N_1 = \langle u_1, u_2, \dots, u_s \rangle, u_i \in N_1 \subseteq R^{n-1} \subseteq R^n$. 当 $N_1 = 0$, 令 $s = 0$. 同理, 由归纳假设 $N_2 = \langle (0, \dots, 0, a_j), 1 \leq j \leq t \rangle$, 在 N 中有 $v_j = (a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jn-1}, a_j) \in N, 1 \leq j \leq t$.

若 $N_2 = \emptyset$, 则 N 中每个元最后分量均为 0, 故 u_1, u_2, \dots, u_s 是生成元.

若 $N_2 \neq \emptyset$, 则 $\langle u_1, \dots, u_s, v_1, \dots, v_t \rangle = N$. 事实上, 对 $\forall v \in N$, 记 $v = (a_1, \dots, a_n)$, 则 $(0, \dots, 0, a_n) \in N_2$, 所以 $(0, \dots, 0, a_n) = \sum_{j=1}^t r_j (0, \dots, 0, a_j)$ 故 $v - \sum_{j=1}^t r_j v_j \in N_1$,

$v - \sum_{j=1}^t r_j v_j = \sum_{i=1}^s r'_i u_i$. 所以 $v \in \langle u_1, \dots, u_s, v_1, \dots, v_t \rangle$. \square

3.3.Hilbert 基定理

定理 8: 设 R 是 Noether 环, 则一元多项式环 $R[x]$ 也是 Noether 环.

证明: 要证 $R[x]$ 的任一理想 I 是有限生成的. 令 L_j 为 I 中所有 j 次多项式的最高项系数及 R 中 0 元构成的集合. 则由 §1. 习题 5 知 L_j 是 R 的理想, $j \in \mathbb{N}$. 且有 R 的理想升链

$$L_0 \subseteq L_1 \subseteq \cdots \subseteq L_n \subseteq \cdots$$

因 R 是 Noether 环, 故存在 $m \in \mathbb{N}$, 使得对任意的 $l \in \mathbb{N}$, 都有 $L_m = L_{m+l}$. 记 $L := \bigcup_{i=0}^{\infty} L_i$, 则 $L = L_m$. 又因 R 是 Noether 环, 每个 $L_j, 0 \leq j \leq m$ 是有限生成. 记 $L_j = \langle a_j^{(1)}, \cdots, a_j^{(k_j)} \rangle, 0 \leq j \leq m$. 由 L_j 的定义知, 在 I 中有 j 次多项式 $f_j^{(1)}, \cdots, f_j^{(k_j)}$, 使得 $f_j^{(i)}$ 的首项系数为 $a_j^{(i)}, 1 \leq i \leq k_j$.

下面证明: $S = \{f_0^{(1)}, \cdots, f_0^{(k_1)}, f_1^{(1)}, \cdots, f_1^{(k_1)}, \cdots, f_m^{(1)}, \cdots, f_m^{(k_m)}\}$ 是 I 的生成元.

设 $f(x) \in I, \deg f(x) = n$. 对 n 作归纳证明 $f(x) \in \langle S \rangle$.

当 $n = 0$ 时, 显然有 $f(x) \in \langle S \rangle$. 设 $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0, a_n \neq 0$. 则 $a_n \in L_n \subseteq L = L_m$.

若 $n < m$, 则 $a_n = \sum_{i=1}^{k_i} r_i a_n^{(i)}$. 于是令 $g(x) = f(x) - \sum_{i=1}^{k_i} r_i f_n^{(i)}$, 则 $\deg g(x) < n$. 由归纳假设 $g(x) \in \langle S \rangle$. 故 $f(x) \in \langle S \rangle$.

若 $n \geq m$, 则 $a_n \in L_n = L_m$. 故 $a_n = \sum_{i=1}^{k_m} r_i a_m^{(i)}$, 令 $g(x) = f(x) - \sum_{i=1}^{k_m} r_i x^{n-m} f_m^{(i)}$, 则 $\deg g(x) < n$. 由归纳假设 $g(x) \in \langle S \rangle$. 故有 $f(x) \in \langle S \rangle$. \square

习题

1. 设 M 是 R -模. 称 M 满足子模的 **极大条件**, 如果对于 M 的任意一些子模构成的非空集合 S 关于包含关系的偏序有极大元. 证明: M 是 Noether 模的充分必要条件是 M 满足子模的极大条件.

2. 证明:

(1) 设 M 是 Noether 模, 则 M 的任意子模和商模都是 Noether;

(2) 设 N 是 M 的子模, 且 N 和 M/N 都是 Noether 模, 则 M 也是 Noether 模;

(3) 设 M_1, M_2 是 M 的子模且 $M = M_1 + M_2$, 若 M_1 和 M_2 都是 Noether 模, 则 M 也是 Noether 模.

3. 设 R 是整环. 证明: R 是 Noether 环的充分必要条件是 R 是主理想整环.

4. 设 φ 是 Noether 模 M 的自同态. 证明 φ 是满同态的充要条件是 φ 是自同构.