模论讲义，林亚南，厦门大学数学科学学院，2008 年 6 月

§2. 模与模同态

2.1 环上的模

定义 2. 设 R 是一个有单位元 1 的环，M 是一个非空集合，M 上有加法运算 $+$, 数乘运算 $R\times M\to M, (r,u)\mapsto ru$, 其中 $(M,+)$ 是 Abel 群，且满足：

(1) 对于任意的 $r\in R, u,v\in M$, 有 $r(u+v)=ru+rv$;

(2) 对于任意的 $r,s\in R, u\in M$, 有 $(r+s)u=ru+ru$;

(3) 对于任意的 $r,s\in R, u\in M$, 有 $(rs)u=r(su)$;

(4) 对于任意的 $u\in M$, 有 $1\cdot u=u$,

则称 M 是一个 R-**模**.

例 1: (1) 设 F 是域，则 F 上线性空间 V 是 F- 模；

(2) 设 M 是 Abel 群，则 M 是 $\mathbb{Z}$- 模；

(3) 环 R 是 R- 模，数乘为环的乘法；

(4) 环 R 上所有 $m\times n$ 矩阵全体 $M_{m\times n}(R)$ 对于矩阵的加法和数乘是构成 R- 模；

(5) $M_{m\times n}(F[X])$ 是 F[X]- 模；

(6) 设 I 是 R 的理想，则 I 是 R- 模；

(7) $R^n=R\times\cdots\times R$($n$ 个 R 的卡氏积) 是 R- 模；

(8) $\mathbb{Z}_6$ 是 $\mathbb{Z}$- 模，但 $\mathbb{Z}$ 不是 $\mathbb{Z}_6$- 模.（思考：为什么？）

例 2: (1) 设 σ 是数域 F 上 n 维线性空间 V 的线性变换，则 V 是 $F[x]$- 模，其数乘定义为 $f(x)v:=f(\sigma)(v)$;

(2) 设 A 是数域 F 上 n 阶方阵, 则 F^n 是 $F[x]$- 模, 其数乘定义为 $f(x)X:=f(A)X$.

2.2 子模

定义 3. 设 M 是 R- 模，N 是 M 的非空子集. 若 N 是 M 的 Abel 子群，且对于任意的 $r\in R, u\in N$, 有 $ru\in N$, 则称 N 是 M 的 **子模**.

例 3: (1) 设 M 是 R- 模，则 $M, 0$ 是 M 模的子模，称为 **平凡子模**;

(2) 设 N,H 是 M 的子模，则 $N+H=\{u+v\mid u\in N, v\in H\}$ 是 M 的子模，称为子模 N,H 的 **和**;

(3) 设 N,H 是 M 的子模，则 $N\cap H$ 也是 M 的子模，称为子模 N 与 H 的 **交**;

(4) 设 $M_i, i \in I$ 是 M 的子模且 $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots \subseteq M_n \subseteq \cdots$, 则 $\cup_{i\in I} M_i$ 是 M 的子模;

(5) 设 M 是 R- 模, $S \subseteq M$, 则

$$\langle S \rangle := \{r_1 s_1 + r_2 s_2 + \cdots + r_n s_n \mid n \in \mathbb{N}, r_i \in R, s_i \in S, 1 \leq i \leq n\}$$

是 M 的子模，称为 **由S生成的子模**; 当 S 是有限集合时，称 $\langle S \rangle$ 是 **有限生成子模**. 当 $S = \{s_1, s_2, \cdots, s_n\}$ 时,

$$\langle s_1, s_2, \cdots, s_n \rangle := \{r_1 s_1 + r_2 s_2 + \cdots + r_n s_n \mid r_i \in R, 1 \leq i \leq n\}.$$

特别地，对 $s \in M$, $\langle s \rangle = \{rs \mid r \in R\}$ 称为 **循环子模**.

(6) 设 R 为交换环, R 作为 R- 模的任意子模是 R 的理想.

定义 4: 设 M 是 R- 模, $M_1, M_2, \cdots, M_s$ 是 M 的子模. 如果满足

(1) $M = M_1 + M_2 + \cdots + M_s$;

(2) $M_i \cap (\sum_{j \neq i} M_j) = 0$,

则称 M 是 $M_1, M_2, \cdots, M_s$ 的 **直和**, 记为 $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$.

命题 3. 设 $M_1, M_2, \cdots, M_s$ 是 R- 模 M 的子模，则下列条件等价

(1) $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_s$;

(2) 对任意的 $m \in M, m = m_1 + \cdots + m_s$ $m_i \in M_i, 1 \leq i \leq s$, 且表示法唯一.

证明: 留做练习. □

2.3 模同态

定义 5. 设 M, N 是 R- 模，映射 $\varphi : M \to N$ 称为 R-**模同态**, 如果

(1) 对任意的 $u, v \in M$, 有 $\varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v)$;

(2) 对任意的 $r \in R, u \in M$, 有 $\varphi(ru) = r\varphi(u)$.

从 R- 模 M 到 N 的所有模同态的集合记为 $\mathrm{Hom}_R(M, N)$.

定义 6. 设 $\varphi : M \to N$ 是 R- 模同态,

(1) 若 $M = N$, 称 φ 是 M 的 **自同态**;

(2) 若 φ 是单映射，则称 φ 是 **单同态**;

(3) 若 φ 是满映射，则称 φ 是 **满同态**;

(4) 若 φ 是一一映射 (既单且满), 则称 φ 是 **同构**, 记 $M \overset{\varphi}{\cong} N$(或 $M \cong N$).

例 4: 设 $\varphi : M \to N$ 是 R- 模同态,

(1) 设 M_1 是 M 的子模，则 $\varphi(M_1)$ 是 N 的子模．特别地，

$$\varphi^{-1}(0)=\{u\in M|\varphi(u)=0\}$$

是 M 的子模，称为 φ 的 **核**, 记为 $\mathrm{Ker}\varphi$;

(2) 设 N_1 是 N 的子模，则 $\varphi^{-1}(N_1)=\{u\in M|\varphi(u)\in N_1\}$ 是 M 的子模．特别地，

$$\varphi(M)=\{\varphi(u)\mid u\in M\}$$

是 N 的子模，称为 φ 的 **像**, 记为 $\mathrm{Im}\varphi$.

命题 4. 设 $\varphi: M\to N$ 是 R- 模同态，则

(1) φ 是单同态 $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}\varphi=0$;

(2) φ 是满同态 $\Leftrightarrow \mathrm{Im}\varphi=N$;

(3) φ 是同构 $\Leftrightarrow$ 存在 R- 模同态 $\psi: N\to M$, 使得 $\psi\varphi=id_M,\varphi\psi=id_N$.

证明：留做练习． □

命题 5: 设 M,N 是 R- 模．则

(1) $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ 是 Abel 群，其加法 $\varphi+\psi$ 定义为 $(\varphi+\psi)(u):=\varphi(u)+\psi(u)$;

(2) $\mathrm{Hom}_R(M,M)$ 是带单位元 id_M 的环，其乘法为映射的合成;

(3) M 是 $\mathrm{Hom}_R(M,M)$- 模，数乘定义为 $\varphi u:=\varphi(u)$.

证明：留做练习． □

2.4 商模

定理 4. 设 M 是 R- 模， N 是 M 的子模，则商群 M/N 是 R- 模，称为 **商模**, 其数乘定义为 $r(u+N):=ru+N$. 自然态射 $\pi: M\to M/N,u\mapsto u+N$ 是 R- 模满同态，且 $\mathrm{Ker}\pi=N$.

证明：由于 M 是 Abel 群，故 N 是 M 的正规子群，从而 M/N 是 Abel 群．且 $u+N=u^{'}+N\Leftrightarrow u-u'\in N$. 为证明数乘定义的合理性，设 $u+N=u'+N$, 即 $u-u'\in N$. 因 N 是子模，故 $ru-ru'=r(u-u')\in N$. 所以 $ru+N=ru'+N$. 易证数乘满足 R- 模的公理.

另外， $\pi(u+v)=(u+v)+N=(u+N)+(V+N)=\pi(u)+\pi(v),\pi(ru)=ru+N=r(u+N)=r\pi(u)$ 从而 π 是 R- 模同态，显然 π 是满同态. $\pi(u)=0\Leftrightarrow u+N=0+N\Leftrightarrow u\in N$. 所以 $\mathrm{Ker}\pi=N$. □

类似群与环，我们有模的同构定理，叙述如下：

定理 5: (1)(第一同构定理) 设 $\varphi : M \to N$ 是 R- 模同态，则有模同构

$$M/\mathrm{Ker}\varphi \cong \mathrm{Im}\varphi;$$

(2)(第二同构定理) 设 N, H 是 R- 模 M 的子模，则有模同构

$$N/(N \cap H) \cong (N + H)/H;$$

(3)(第三同构定理) 设 N, H 是 R- 模 M 的子模，且 $H \subseteq N$, 则 N/H 是 M/H 的子模，且有 R- 模同构

$$(M/H)/(N/H) \cong M/N.$$

证明：留做练习. □

习题

1. 证明命题 3.
2. 证明命题 4.
3. 证明命题 5.
4. 证明定理 5.

5. (1) 一个 R- 模 M 是有限生成的充分必要条件是存在 $n \in \mathbb{N}$ 和 R- 模满同态 $\varphi : R^n \to M$;

(2) 设 R- 模同态 $\varphi : M \to N$ 是满同态，且 M 是有限生成，则 N 也是有限生成.

6. (1) I 是 R 的理想，则 R/I 是循环 R- 模;

(2) 设 R 是带单位元的交换环，则 R 是主理想整环的充分必要条件是 R 上循环模的子模也是循环模.

7. 设 M 是 R- 模， I 是 R 的理想．求证：

(1) $IM := \{r_1u_1 + r_2u_2 + \cdots + r_nu_n \mid n \in \mathbb{N}, u_i \in M, r_i \in I, 1 \le i \le n\}$ 是 M 的子模;

(2) 设 $M = \langle S \rangle$, 则 $IM = \{r_1u_1 + r_2u_2 + \cdots + r_nu_n \mid n \in \mathbb{N}, u_i \in S, r_i \in I, 1 \le i \le n\}$;

(3) M/IM 是 R/I- 模，数乘定义为 $(r + I)(u + IM) := ru + IM$.

8. 设 R 是主理想整环， $0 \ne a \in R$. 令 $\varphi : R \to \langle a \rangle, r \mapsto ra$, 则 φ 是 R- 模同构. (注：一般不是环同构).

9. 设 N 是 R^n 的理想．令

$$N_1 = \{r = (r_1, r_2, \cdots, r_{n-1}, 0) \mid r \in N, r_i \in R, 1 \le i \le n-1\},$$

$$N_2=\{(0,0,\cdots,0,r_n)\mid(r_1,r_2,\cdots,r_n)\in N, r_i\in R\}.$$

求证： N_1 同构于 R^{n-1} 的子模， N_2 同构于 R 的子模.

10. 设 R 是交换环， N 是 R- 模 M 的子模， $p\in R$, 令 $N_p:=\{n\in N\mid pn=0\}$.
求证：

(1) N_p 是 M 的 R- 子模;

(2) N_p 是 $R/\langle p\rangle$- 模;

(3) $N_0=N$;

(4) 设 a 是 R 的可逆元，则 $N_a=0$;

(5) 若 $p|q$, 则 $N_p\subseteq N_q$;

(6) 若 $M=S\oplus T$, 则 $M_p=S_p\oplus T_p$;

(7) 设在 R 中 $\langle d\rangle=\langle a\rangle+\langle b\rangle$, 则有 $N_d=N_a\cap N_b$;

(8) 设在 R 中 a,b 互素，则有 $N=N_a\oplus N_b$.