



[Home Page](#)

[Title Page](#)



[Page 1 of 35](#)

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

福建师范大学数计学院



空间分解与约当标准形

张圣贵

2006 年 4 月 22 日

Home Page

Title Page



Page 2 of 35

Go Back

Full Screen

Close

Quit

空间分解与约当标准形



一 问题提出



二 空间分解



三 线性变换的最小多项式



四 幂零变换的结构



五 线性变换的约当标准形



[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 3 of 35

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

一. 问题提出

设 V 是域 F 上的 n 维向量空间, $\mathcal{A} : V \rightarrow V$ 是一个映射, 若对于 $\forall \alpha, \beta \in V, \forall k, l \in F$ 有

$$\mathcal{A}(k\alpha + l\beta) = k\mathcal{A}(\alpha) + l\mathcal{A}(\beta)$$

则称 $\mathcal{A}$ 是 V 上的线性变换.

$\text{Hom}(V, V)$ 表示 V 上的所有线性变换的集合, 关于线性变换的加法, 数乘和合成(乘法)构成一个 F 上的代数.

$M_n(F)$ 表示 F 上所有 n 阶矩阵的集合, 关于矩阵的加法, 数乘和乘法也构成一个 F 上的代数.

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 4 of 35](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



取定 V 的一个基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, 对于 $\forall \mathcal{A} \in \text{Hom}(V, V)$, 有

$$\mathcal{A}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)A$$

其中 $A \in M_n(F)$. 称 A 是线性变换 $\mathcal{A}$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 下的矩阵.

定义映射

$$\psi : \text{Hom}(V, V) \rightarrow M_n(F), \psi(\mathcal{A}) = A$$

则 ψ 是 $\text{Hom}(V, V)$ 到 $M_n(F)$ 的代数同构映射.

$$\text{Hom}(V, V) \cong M_n(F)$$

问题: 一个线性变换在不同基下的矩阵有什么关系?

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 5 of 35

Go Back

Full Screen

Close

Quit



设 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 是 V 的另一个基, 对于给定的 $A \in Hom(V, V)$, 设

$$(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)T$$

$$\mathcal{A}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)A$$

$$\mathcal{A}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)B$$

则

$$B = T^{-1}AT$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 6 of 35](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



问题:

(1) 从线性变换角度, 对于给定的 $A \in \text{Hom}(V, V)$ 是否存在 V 的一个基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 使得 A 在它下的矩阵具有最简单形式? 最简单形式是什么?

(2) 从矩阵角度, 矩阵相似是 $M_n(F)$ 上的一个等价关系, 对于给定的 $A \in M_n(F)$, 包含 A 的相似类中, 最简单的代表元是什么?

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀◀](#) [▶▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 7 of 35

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

二. 空间分解

设 $V_1, V_2, \dots, V_s$ 是域 F 上的向量空间 V 的子空间, 若对于 $\forall \alpha \in V$, 存在唯一一组向量 $\alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_2, \dots, \alpha_s \in V_s$ 使得

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_s$$

则称 V 可分解为 $V_1, V_2, \dots, V_s$ 的直和, 记作

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_s$$

结论: 若 $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_s$, 且 $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{it_i}$ 是 V_i 的一个基, $i = 1, 2, \dots, s$, 则 $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{1t_1}, \dots, \alpha_{s1}, \alpha_{s2}, \dots, \alpha_{st_s}$ 是 V 的一个基.

[Home Page](#)[Title Page](#)[<<](#)[>>](#)[<](#)[>](#)[Page 8 of 35](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



问题: 对于给定的 $\mathcal{A} \in \text{Hom}(V, V)$, 是否存在 V 的一个基, 使得 $\mathcal{A}$ 在这个基下的矩阵为对角矩阵?

如果有 $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_s$, 且 $\mathcal{A}|_{V_i} = \lambda_i \mathcal{I}_i$, 即对于 $\forall \xi \in V_i$, 都有 $\mathcal{A}(\xi) = \lambda_i \xi$, 其中 $\mathcal{I}_i$ 为 V_i 的单位变换, $i = 1, 2, \cdots, s$, 则取 V_i 的基 $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \cdots, \alpha_{it_i}$, $i = 1, 2, \cdots, s$, $\mathcal{A}$ 在 V 的基 $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \cdots, \alpha_{1t_1}, \cdots, \alpha_{s1}, \alpha_{s2}, \cdots, \alpha_{st_s}$ 下的矩阵为对角矩阵

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & & & \\ & \lambda_2 I_{n_2} & & \\ & & \cdots & \\ & & & \lambda_s I_{n_s} \end{pmatrix}$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[<<](#) [>>](#)[<](#) [>](#)[Page 9 of 35](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



对于 $\mathcal{A} \in \text{Hom}(V, V)$, 若存在一个非零向量 ξ 使得

$$\mathcal{A}\xi = \lambda\xi, \lambda \in F$$

则称 λ 是 $\mathcal{A}$ 的**特征值**, 称 ξ 是 $\mathcal{A}$ 的属于特征值 λ 的**特征向量**.

设 λ 是 $\mathcal{A}$ 的一个特征值, 令

$$V_\lambda = \{\alpha \mid \mathcal{A}\alpha = \lambda\alpha, \alpha \in V\}$$

则 V_λ 是 V 的子空间, 称 V_λ 为 $\mathcal{A}$ 的属于特征值 λ 的**特征子空间**.

[Home Page](#)[Title Page](#)[<<](#) [>>](#)[<](#) [>](#)[Page 10 of 35](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



设 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ 是 $\mathcal{A}$ 的所有互不相同的特征值, 设 $\dim V_{\lambda_i} = n_i$, 若

$$V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_s}$$

取 V_{λ_i} 的一个基 $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{in_i}$, $i = 1, 2, \dots, s$, 则 $\mathcal{A}$ 在 V 的基 $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{1n_1}, \dots, \alpha_{s1}, \alpha_{s2}, \dots, \alpha_{sn_s}$ 下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & & & \\ & \lambda_2 I_{n_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_s I_{n_s} \end{pmatrix}$$

称 $\mathcal{A}$ 可对角化.

若实数域 $\mathbb{R}$ 上的向量空间 V 的线性变换 $\mathcal{A}$ 在 V 的一个基下的矩阵为对称矩阵, 则 $\mathcal{A}$ 可以对角化.

[Home Page](#)[Title Page](#)[<<](#) [>>](#)[<](#) [>](#)[Page 11 of 35](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



问题: 若 $A \in \text{Hom}(V, V)$ 可对角化, 如何找 V 的一个基, 使得 A 在这个基下的矩阵为对角矩阵?

计算步骤:

1. 任取 V 的一个基 $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$, 写出 A 在此基下的矩阵 A ;
2. 计算 A 的特征多项式 $f_A(\lambda)$, 并求出 $f_A(\lambda)$ 所有不同的根 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$;
3. 求出 A 的属于 λ_i 的所有线性无关的特征向量 $\eta_{i1}, \eta_{i2}, \dots, \eta_{in_i}$, $i = 1, 2, \dots, s$;
4. 令 $\alpha_{ij} = (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n) \eta_{ij}$, $j = 1, 2, \dots, n_i$, $i = 1, 2, \dots, s$, 那么 A 在 V 的基 $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{1n_1}, \dots, \alpha_{s1}, \alpha_{s2}, \dots, \alpha_{sn_s}$ 下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & & & \\ & \lambda_2 I_{n_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_s I_{n_s} \end{pmatrix}$$

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀](#) [▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 12 of 35

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



问题: 对于不可对角化的线性变换 $\mathcal{A}$, 能否在 V 中找到一个适当的基, 使得 $\mathcal{A}$ 在这个基下的矩阵具有最简单形式? 这个最简单形式是什么样的矩阵?

设 $\mathcal{A} \in \text{Hom}(V, V)$, W 是 V 的子空间. 若对于 $\forall \alpha \in W$ 有 $\mathcal{A}(\alpha) \in W$, 即 $\mathcal{A}(W) \subseteq W$, 则称 W 是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间.

$\mathcal{A}$ 的核 $\text{Ker } \mathcal{A} = \{\alpha | \mathcal{A}(\alpha) = 0\}$ 和象 $\text{Im } \mathcal{A} = \{\mathcal{A}(\alpha) | \alpha \in V\}$ 都是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间, $\mathcal{A}$ 的特征子空间也是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间.

[Home Page](#)[Title Page](#)[<<](#) [>>](#)[<](#) [>](#)

Page 13 of 35

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#)[▶▶](#)[◀](#)[▶](#)[Page 14 of 35](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

对于给定的 $\mathcal{A} \in \text{Hom}(V, V)$, 若存在 $\mathcal{A}$ 的不变子空间 $V_1, V_2, \dots, V_s$ 使得

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_s$$

设 $\dim V_i = r_i$, 取 V_i 的一个基 $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{ir_i}$, $i = 1, 2, \dots, s$,

则 $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{1r_1}, \dots, \alpha_{s1}, \alpha_{s2}, \dots, \alpha_{sr_s}$ 是 V 的一个基, 且 $\mathcal{A}$ 在它下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}$$

其中 $A_i \in M_{r_i}(F)$, $i = 1, 2, \dots, s$.



问题: 对于 $\mathcal{A} \in \text{Hom}(V, V)$, 如何找出它的一些非平凡的不变子空间?

命题 对于 $\forall \mathcal{A}, \mathcal{B} \in \text{Hom}(V, V)$, 若 $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$, $\text{Ker}\mathcal{B}$, $\text{Im}\mathcal{B}$, $\mathcal{B}$ 的特征子空间都是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间.

由此命题可知, 对于 $\forall \mathcal{A} \in \text{Hom}(V, V)$, $\forall f(x) \in F[x]$, 有 $\text{Ker}f(\mathcal{A})$, $\text{Im}f(\mathcal{A})$, $f(\mathcal{A})$ 的特征子空间都是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间.

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀◀](#) [▶▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 15 of 35

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



问题: 能否找到一些多项式 $f_1(x), f_2(x), \dots, f_s(x) \in F[x]$, 使得

$$V = \text{Ker} f_1(\mathcal{A}) \oplus \text{Ker} f_2(\mathcal{A}) \oplus \dots \oplus \text{Ker} f_s(\mathcal{A}) ?$$

命题 对于 $\forall \mathcal{A} \in \text{Hom}(V, V)$, 若在 $F[x]$ 中, $f(x) = f_1(x)f_2(x) \cdots f_s(x)$, 其中 $f_1(x), f_2(x), \dots, f_s(x)$ 两两互素, 则

$$\text{Ker} f(\mathcal{A}) = \text{Ker} f_1(\mathcal{A}) \oplus \text{Ker} f_2(\mathcal{A}) \oplus \dots \oplus \text{Ker} f_s(\mathcal{A})$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[<<](#) [>>](#)[<](#) [>](#)

Page 16 of 35

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



问题: 是否存在 $f(x) \in F[x]$ 使得 $\text{Ker } f(\mathcal{A}) = V$, 即 $f(\mathcal{A}) = 0$?

设 $\dim V = n$, 则 $\dim \text{Hom}(V, V) = n^2$, 从而 $I, \mathcal{A}, \mathcal{A}^2, \dots, \mathcal{A}^{n^2}$ 线性相关,
故存在不全为零的数 $k_0, k_1, k_2, \dots, k_{n^2}$ 使得

$$k_0 I + k_1 \mathcal{A} + k_2 \mathcal{A}^2 + \dots + k_{n^2} \mathcal{A}^{n^2} = 0.$$

令

$$f(x) = k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \dots + k_{n^2} x^{n^2}$$

则 $f(\mathcal{A}) = 0$, $f(x)$ 称为 $\mathcal{A}$ 的**零化多项式**.

问题: 怎样轻松求出一个零化多项式?

Hamilton-Cayley 定理 设 $\mathcal{A} \in \text{Hom}(V, V)$, 则 $\mathcal{A}$ 的特征多项式 $f(\lambda)$ 是 $\mathcal{A}$ 的一个零化多项式.

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 17 of 35](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 18 of 35](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

设 $\mathcal{A} \in \text{Hom}(V, V)$, 若 $\mathcal{A}$ 的特征多项式 $f(\lambda)$ 在 $F[x]$ 中可分解成

$$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1} (\lambda - \lambda_2)^{r_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{r_s}$$

则

$$V = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{I})^{r_1} \oplus \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda_2 \mathcal{I})^{r_2} \oplus \cdots \oplus \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda_s \mathcal{I})^{r_s}$$

其中 $\text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda_i \mathcal{I})^{r_i}$ 称为 $\mathcal{A}$ 的根子空间.

$\text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda_i \mathcal{I})^{r_i}$ 上的线性变换 $(\mathcal{A} - \lambda_i \mathcal{I})|_{W_i}$ 满足 $[(\mathcal{A} - \lambda_i \mathcal{I})|_{W_i}]^{r_i} = 0$.



问题: 是否存在次数比特征多项式的次数更低的零化多项式?

例 矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

的特征多项式为 $(\lambda - 1)^3$, $(\lambda - 1)^2$ 也是它的零化多项式, 而矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

没有次数小于3的零化多项式.

Home Page

Title Page

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Page 19 of 35

Go Back

Full Screen

Close

Quit



三. 线性变换的最小多项式

设 $A \in \text{Hom}(V, V)$, 在 A 的所有非零零化多项式中, 次数最低的首项系数为1的多项式称为 A 的**最小多项式**, 记作 $m_A(\lambda)$.

(1) A 的最小多项式 $m_A(\lambda)$ 是唯一的.

(2) A 的任意一个零化多项式都是其最小多项式的倍式.

(3) A 的最小多项式 $m_A(\lambda)$ 与其特征多项式 $f(\lambda)$ 在域 F 中有相同的根(重数可以不同).

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀◀](#) [▶▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 20 of 35

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 21 of 35](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

下列定理给出了最小多项式的一种求法.

定理 设 $\mathcal{A} \in \text{Hom}(V, V)$, 如果存在 $\mathcal{A}$ 的一些非平凡不变子空间 $W_1, W_2, \dots, W_s$ 使得

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_s$$

则 $\mathcal{A}$ 的最小多项式

$$m_{\mathcal{A}}(\lambda) = [m_{\mathcal{A}|_{W_1}}(\lambda), m_{\mathcal{A}|_{W_2}}(\lambda), \dots, m_{\mathcal{A}|_{W_s}}(\lambda)]$$



设 $\mathcal{A} \in \text{Hom}(V, V)$, 若存在一个正整数 l 使得 $\mathcal{A}^l = 0$, 则称 $\mathcal{A}$ 是**幂零变换**; 使得 $\mathcal{A}^l = 0$ 成立的最小正整数 l 称为**幂零指数**.

幂零指数为 l 的幂零变换 $\mathcal{A}$ 的最小多项式 $m_{\mathcal{A}}(\lambda) = \lambda^l$.

域 F 上形如

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{pmatrix}$$

的一个 r 阶矩阵称为一个 **r 阶约当块**, 记作 $J_r(a)$. 由若干个约当块组成的分块对角矩阵称为**约当形矩阵**

利用最小多项式可以刻画可对角化线性变换:

定理 设 $\mathcal{A} \in \text{Hom}(V, V)$, 则 $\mathcal{A}$ 可对角化的充分必要条件为它的最小多项式 $m_{\mathcal{A}}(\lambda)$ 在 $F[\lambda]$ 中可分解成互不相同的一次因式乘积.

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 22 of 35

Go Back

Full Screen

Close

Quit

问题: 如何利用最小多项式研究不可对角化的线性变换的结构?

设 $\mathcal{A} \in \text{Hom}(V, V)$, 若 $\mathcal{A}$ 的最小多项式 $m_{\mathcal{A}}(\lambda)$ 在 $F[\lambda]$ 中可分解为一次因式乘积:

$$m_{\mathcal{A}}(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{l_1} (\lambda - \lambda_2)^{l_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{l_s}$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ 是 F 中两两不同的元素, 则

$$\text{Ker } m_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{I})^{l_1} \oplus \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda_2 \mathcal{I})^{l_2} \oplus \cdots \oplus \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda_s \mathcal{I})^{l_s}$$

因 $\text{Ker } m_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = V$, 令 $W_i = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda_i \mathcal{I})^{l_i}$, $i = 1, 2, \cdots, s$, 则 W_i 是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间, $i = 1, 2, \cdots, s$, 且

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_s$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[<<](#) [>>](#)[<](#) [>](#)[Page 23 of 35](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



设 $\dim W_i = n_i, i = 1, 2, \dots, s$, 在 W_i 中取一个基 $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{in_i}, i = 1, 2, \dots, s$, 则

$$\begin{aligned} & \mathcal{A}(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{1n_1}, \dots, \alpha_{s1}, \alpha_{s2}, \dots, \alpha_{sn_s}) \\ &= (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{1n_1}, \dots, \alpha_{s1}, \alpha_{s2}, \dots, \alpha_{sn_s}) \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_s \end{pmatrix} \end{aligned}$$

其中

$$\mathcal{A}|_{W_i}(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{in_i}) = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{in_i})A_i,$$

$i = 1, 2, \dots, s$.

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 24 of 35

Go Back

Full Screen

Close

Quit



为了使

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_s \end{pmatrix}$$

最简单, 就应使 A_i 最简单, $i = 1, 2, \dots, s$. 因此, 我们研究 W_i 上的线性变换 $\mathcal{A}|_{W_i}$, $i = 1, 2, \dots, s$.

$\mathcal{A}|_{W_i}$ 的最小多项式是 $m_{\mathcal{A}|_{W_i}}(\lambda) = (\lambda - \lambda_i)^{l_i}$, 令 $\mathcal{B}_i = \mathcal{A}|_{W_i} - \lambda_i \mathcal{I}$, 则 $\mathcal{B}_i$ 是 W_i 上的幂零指数为 l_i 的幂零变换, 且

$$\mathcal{B}_i(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{in_i}) = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{in_i})(A_i - \lambda_i I_{n_i})$$

问题: 设 W 是 F 上的 r 维向量空间, $\mathcal{B} \in \text{Hom}(W, W)$ 是幂零变换, 且幂零指数为 l , 能否在 W 中找到一个基, 使得 $\mathcal{B}$ 在这个基下的矩阵最简单?

[Home Page](#)[Title Page](#)[<<](#) [>>](#)[<](#) [>](#)[Page 25 of 35](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



四. 幂零变换的结构

命题 设 W 是 F 上的 r 维向量空间, $\mathcal{B} \in \text{Hom}(W, W)$ 是幂零变换, 且幂零指数为 l , 则存在 $\xi \in W$, 使得向量组

$$\mathcal{B}^{l-1}\xi, \mathcal{B}^{l-2}\xi, \dots, \mathcal{B}\xi, \xi$$

线性无关, 从而 $l \leq \dim W$.

[Home Page](#)[Title Page](#)[<<](#)[>>](#)[<](#)[>](#)[Page 26 of 35](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



若 $l = \dim W$, 则向量组

$$\mathcal{B}^{l-1}\xi, \mathcal{B}^{l-2}\xi, \dots, \mathcal{B}\xi, \xi$$

是 W 的一个基, 从而

$$\mathcal{B}(\mathcal{B}^{l-1}\xi, \mathcal{B}^{l-2}\xi, \dots, \mathcal{B}\xi, \xi) = (\mathcal{B}^{l-1}\xi, \mathcal{B}^{l-2}\xi, \dots, \mathcal{B}\xi, \xi) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[<<](#)[>>](#)[<](#)[>](#)[Page 27 of 35](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

若 $l < \dim W$, 则向量组

$$\mathcal{B}^{l-1}\xi, \mathcal{B}^{l-2}\xi, \dots, \mathcal{B}\xi, \xi$$

不是 W 的一个基, 但由它们生成的子空间

$$\langle \mathcal{B}^{l-1}\xi, \mathcal{B}^{l-2}\xi, \dots, \mathcal{B}\xi, \xi \rangle$$

是 $\mathcal{B}$ 的不变子空间, 称为由 ξ 生成的 $\mathcal{B}$ -循环子空间, 记作 $Z_l(\xi; \mathcal{B})$. 则

$$\begin{aligned} & \mathcal{B}|_{Z_l(\xi; \mathcal{B})}(\mathcal{B}^{l-1}\xi, \mathcal{B}^{l-2}\xi, \dots, \mathcal{B}\xi, \xi) \\ &= (\mathcal{B}^{l-1}\xi, \mathcal{B}^{l-2}\xi, \dots, \mathcal{B}\xi, \xi) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[Page 28 of 35](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



问题: W 能否分解为一些 $\mathcal{B}$ -循环子空间的直和?

先分析 $Z_l(\xi; \mathcal{B})$ 的特点:

$$\forall \alpha \in Z_l(\xi; \mathcal{B})$$

$$\Leftrightarrow \alpha = k_{l-1}\mathcal{B}^{l-1}\xi + \cdots + k_1\mathcal{B}\xi + k_0\xi = (k_{l-1}\mathcal{B}^{l-1} + \cdots + k_1\mathcal{B} + k_0\mathcal{I})\xi$$

$$\Leftrightarrow \alpha = h(\mathcal{B})\xi, \quad h(\mathcal{B}) = k_{l-1}\mathcal{B}^{l-1} + \cdots + k_1\mathcal{B} + k_0\mathcal{I}$$

则

$$Z_l(\xi; \mathcal{B}) = \{h(\mathcal{B})\xi \mid h(\lambda) \in F[\lambda], h(\lambda) = 0 \text{ or } \deg h(\lambda) < l\}$$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 29 of 35

Go Back

Full Screen

Close

Quit



因此, 引进下列概念:

设 W 是 F 上的 r 维向量空间, $\mathcal{B} \in \text{Hom}(W, W)$, $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_s$ 是 W 的一个向量组. 对于 $\alpha \in W$, 若存在 $h_1(\lambda), h_2(\lambda), \dots, h_s(\lambda) \in F[\lambda]$, 使得

$$\alpha = h_1(\mathcal{B})\eta_1 + h_2(\mathcal{B})\eta_2 + \dots + h_s(\mathcal{B})\eta_s$$

则称 α 可由 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_s$ $F[\lambda]$ -表出, 称 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_s$ 是 W 的 $\mathcal{B}$ -生成元系.

设 W 是 F 上的 r 维向量空间, $\mathcal{B} \in \text{Hom}(W, W)$, 若 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$ 是 W 的一个 $\mathcal{B}$ -生成元系, 而 W 的任何 $m-1$ 个向量都不是 W 的 $\mathcal{B}$ -生成元系, 则称 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$ 是 W 的一个最小 $\mathcal{B}$ -生成元系.

W 一定存在最小 $\mathcal{B}$ -生成元系, 但 W 的最小 $\mathcal{B}$ -生成元系不唯一.

[Home Page](#)[Title Page](#)[<<](#)[>>](#)[<](#)[>](#)[Page 30 of 35](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



利用最小 $\mathcal{B}$ -生成元系, 可得到

定理 设 W 是 F 上的 r 维向量空间, $\mathcal{B} \in Hom(W, W)$ 是幂零变换, 则 W 可分解为一些 $\mathcal{B}$ -子空间的直和.

利用上述定理, 可以得到幂零变换的结构定理.

定理 设 W 是 F 上的 r 维向量空间, $\mathcal{B} \in Hom(W, W)$ 是幂零变换, 且幂零指数为 l , 则 W 中存在一个基, 使得 $\mathcal{B}$ 在此基下的矩阵 B 为约当形矩阵, 其中每个约当块的主对角元都是0, 且阶数不超过 l , 约当块总数等于 $\mathcal{B}$ 的特征子空间 W_0 的维数, t 阶约当块的个数 $N(t)$ 为

$$N(t) = \dim[Im(\mathcal{B}^{t+1})] + \dim[Im(\mathcal{B}^{t-1})] - 2\dim[Im(\mathcal{B}^t)]$$

这个约当形矩阵称为幂零变换 $\mathcal{B}$ 的**约当标准形**, 除了约当块的排列次序外, $\mathcal{B}$ 的约当标准形是唯一的.

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[«](#) [»](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 31 of 35

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



推论 设 B 是域 F 上的幂零矩阵, 其幂零指数为 l , 则 B 相似于一个约当形矩阵, 其中每个约当块的主对角元为0, 且级数不超过 l , 约当块的总数等于 B 的特征子空间的维数(即齐次线性方程组 $BX = 0$ 的解空间的维数), t 级约当块的个数 $N(t)$ 为

$$N(t) = \text{rank } B^{t+1} + \text{rank } B^{t-1} - 2\text{rank } B^t$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[<<](#) [>>](#)[<](#) [>](#)

Page 32 of 35

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

五. 线性变换的约当标准形

利用幂零变换的结构定理, 可以得到最小多项式可分解成一次因式乘积的线性变换的结构.

定理 设 V 是 F 上的 n 维向量空间, $\mathcal{A} \in \text{Hom}(V, V)$, 若 $\mathcal{A}$ 的最小多项式 $m_{\mathcal{A}}(\lambda)$ 在 $F[\lambda]$ 中可分解为一次因式的乘积:

$$m_{\mathcal{A}}(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{l_1} (\lambda - \lambda_2)^{l_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{l_s}$$

则 V 中存在一个基, 使得 $\mathcal{A}$ 在这个基下的矩阵 A 为约当形矩阵, 其主对角元为 $\mathcal{A}$ 的全部特征值; 主对角元为 λ_j 的约当块总数 N_j 为

$$N_j = \dim V - \dim[\text{Im}(\mathcal{A} - \lambda_j \mathcal{I})], \quad j = 1, 2, \cdots, s,$$

且其中每个约当块的阶数不超过 l_j , t 阶约当块 $J_t(\lambda_j)$ 的个数 $N_j(t)$ 为

$$N_j(t) = \dim\{\text{Im}[(\mathcal{A} - \lambda_j \mathcal{I})^{t+1}]\} + \dim\{\text{Im}[(\mathcal{A} - \lambda_j \mathcal{I})^{t-1}]\} - 2\dim\{\text{Im}[(\mathcal{A} - \lambda_j \mathcal{I})^t]\}$$

这个约当形矩阵称为 $\mathcal{A}$ 的**约当标准形**, 除了约当块的排列次序外, $\mathcal{A}$ 的约当标准形是唯一的.

[Home Page](#)[Title Page](#)[<<](#) [>>](#)[<](#) [>](#)[Page 33 of 35](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



推论 设 A 是域 F 上的 n 级矩阵, 若 A 的最小多项式 $m(\lambda)$ 在 $F[\lambda]$ 中可分解为一次因式的乘积:

$$m(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{l_1} (\lambda - \lambda_2)^{l_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{l_s}$$

则 A 相似于一个约当形矩阵, 其中主对角线上的元素是 A 的全部特征值; 主对角元为 λ_i 的约当块总数 N_j 为

$$N_j = n - \text{rank}(A - \lambda_i I), \quad j = 1, 2, \cdots, s,$$

且其中每个约当块的级数不超过 l_j , t 级约当块的个数 $N_j(t)$ 为

$$N_j(t) = \text{rank}(A - \lambda_j I)^{t+1} + \text{rank}(A - \lambda_j I)^{t-1} - 2\text{rank}(A - \lambda_j I)^t$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[<<](#) [>>](#)[<](#) [>](#)

Page 34 of 35

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

谢谢!



[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 35 of 35

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)