线性变换的 Jordan-Chevalley 分解

谭绍滨
厦门大学数学科学学院

问题的提出: 对复数域上的任意 n 阶方阵 A, 及 A 的 Jordan 标准型

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & J_k \end{pmatrix}$$

即 $A = PJP^{-1}$, 其中 P 为可逆矩阵,

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

记

$$S_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 0 & \cdots & 0 \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}, \ N_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

即 $J_i = S_i + N_i$. 再记

$$S = P \begin{pmatrix} S_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & S_2 & \cdots & 0 \\ & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & S_k \end{pmatrix} P^{-1}, \quad N = P \begin{pmatrix} N_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & N_2 & \cdots & 0 \\ & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & N_k \end{pmatrix} P^{-1}$$

则有矩阵 A 的 Jordan 分解： $A = S + N$, 其中 S 与 N 分别为可对角化矩阵与幂零矩阵，且 S 与 N 可交换.

问题：

(1). 分解式 $A = S + N$ 是否唯一？

(2). 若分解唯一，则意味着可对角化矩阵 S 与幂零矩阵 N 完全由矩阵 A 所确定．如何确定矩阵 S, N 与矩阵 A 的依赖关系？

答案：

(1). 分解式唯一！

(2). 存在常数项为零的多项式 $p(x), q(x)$, 使得 $S = p(A)$, $N = q(A)$.

设 $\mathbf{C}[x]$ 为复系数多项式环，V 为有限维复线性空间. 记 $\mathrm{End}V$ 为 V 上的线性变换全体.

定义 1. 设 $\mathbf{A} \in \mathrm{End}V$. 若 $\mathbf{A}$ 可对角化，则称 $\mathbf{A}$ 为半单. 若存在正整数 n 使得 $\mathbf{A}^n = \mathbf{0}$, 则称 $\mathbf{A}$ 为幂零.

Jordan-Chevalley 分解定理. $\mathbf{A} \in End\mathrm{V}$ 为任一线性变换. 则存在唯一的一对线性变换 $\mathbf{S}$ 与 $\mathbf{N}$, 使得

(1) $\mathbf{A} = \mathbf{S} + \mathbf{N}$, 其中 $\mathbf{S}, \mathbf{N}$ 分别为半单与幂零线性变换，且 $\mathbf{S}$ 与 $\mathbf{N}$ 可交换.

(2) 存在常数项为零的多项式 $p(x), q(x) \in \mathbf{C}[x]$, 使得 $\mathbf{S} = p(\mathbf{A}), \mathbf{N} = q(\mathbf{A})$.

设 $f(x), g(x) \in \mathbf{C}[x]$, 且 $g(x) \neq 0$, 则存在唯一的一对多项式 $q(x), r(x)$, 使得

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x)$$

其中 $r(x) = 0$, 或 $\deg(r(x)) < \deg(g(x))$.

设 $d(x)$ 为多项式 $f(x), g(x)$ 的最大公因式，则存在多项式 $u(x), v(x)$, 使得

$$d(x) = u(x)f(x) + v(x)g(x).$$

设 $\mathbf{A}$ 为 V 上的线性变换，$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in \mathbf{C}[x]$. 记

$$f(\mathbf{A}) = a_0\mathbf{E} + a_1\mathbf{A} + \cdots + a_n\mathbf{A}^n \in EndV$$

其中 $\mathbf{E}$ 为 V 上的恒同变换.

引理 2. 设 $p_1(x),\cdots,p_k(x)\in\mathbf{C}[x]$ 为两两互素的多项式. 则对每个 $1\le i\le k$, 存在多项式 $f_i(x)$, 使得

$$p_i(x)|(f_i(x)-1),\quad p_j(x)|f_i(x),\ (j\neq i).$$

证: 由于 $p_1(x),\cdots,p_k(x)\in\mathbf{C}[x]$ 两两互素，于是

$$(\prod_{j\neq i}p_j(x),p_i(x))=1,$$

从而存在多项式 $u_i(x),v_i(x)$, 使得

$$u_i(x)\prod_{j\neq i}p_j(x)+v_i(x)p_i(x)=1,$$

现在令 $f_i(x)=u_i(x)\prod_{j\neq i}p_j(x)$ 即可. $\square$

中国剩余定理. 设 $p_1(x),\cdots,p_k(x)\in\mathbf{C}[x]$ 为两两互素的多项式. 则对任意多项式 $g_1(x),\cdots,g_k(x)\in\mathbf{C}[x]$, 存在多项式 $p(x)$ 使得

$$p_i(x)|(p(x)-g_i(x))$$

对所有 $1\le i\le k$ 成立.

证: 有引理 2 知对每个 $1\le i\le k$, 存在多项式 $f_i(x)$ 使得

$$p_i(x)|(f_i(x)-1),\quad p_j(x)|f_i(x),\ (j\ne i).$$

记 $p(x)=\Sigma_{i=1}^k f_i(x)g_i(x)$ 即可. $\square$

推论 3. 设 $f(x)=\Pi_{i=1}^{k}(x-a_i)^{m_i}$, 其中 $a_1,\cdots,a_k$ 为两两不同的复数， $m_i\geq 1$ 都为整数．则存在常数项为零的多项式 $p(x)$, 使得

$$(x-a_i)^{m_i}|(p(x)-a_i)$$

对所有 $1\leq i\leq k$ 成立.

证: 分两种情形讨论．情形 I. 当复数 $a_1,\cdots,a_k$ 中有一个等于零时，则在上面的中国剩余定理中取

$$p_i(x)=(x-a_i)^{m_i},\ \ g_i(x)=a_i,\ (1\leq i\leq k)$$

既得所要的 $p(x)$. 情形 II. 若复数 $a_1,\cdots,a_k$ 都不等于零时．则在本推论中将多项式 $f(x)=\Pi_{i=1}^{k}(x-a_i)^{m_i}$ 改为 $f(x)=\Pi_{i=1}^{k+1}(x-a_i)^{m_i}$, 其中 $a_{k+1}=0$, $m_{k+1}=1$. 然后再有情形 I 得到所要的多项式 $p(x)$. $\square$

对 $\mathbf{A}\in \mathrm{End}V$, $f(x)\in \mathbf{C}[x]$, 记线性变换 $f(\mathbf{A})$ 的核为

$$\mathrm{Ker} f(\mathbf{A})=\{v\in V|f(\mathbf{A}).v=0\}\subset V.$$

引理 4. (1) 设 $h(x), f(x)\in \mathbf{C}[x]$, 且 $h(x)|f(x)$. 则

$$\mathrm{Ker} h(\mathbf{A})\subset \mathrm{Ker} f(\mathbf{A}).$$

(2). 若 $d(x)$ 为 $f(x), g(x)$ 的最大公因式，则

$$\mathrm{Ker} d(\mathbf{A})=\mathrm{Ker} f(\mathbf{A})\cap \mathrm{Ker} g(\mathbf{A}).$$

证. (1). 设 $f(x)=g(x)h(x)$, 则 $f(\mathbf{A})=g(\mathbf{A})h(\mathbf{A})$, 由此得 $\mathrm{Ker} h(\mathbf{A})\subset \mathrm{Ker} f(\mathbf{A})$.

(2). 由 (1) 得知 $\mathrm{Ker} d(\mathbf{A})\subset \mathrm{Ker} f(\mathbf{A})\cap \mathrm{Ker} g(\mathbf{A})$. 另一方面，存在多项式 $u(x), v(x)$ 使得 $d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x)$, 因此

$$d(\mathbf{A})=u(\mathbf{A})f(\mathbf{A})+v(\mathbf{A})g(\mathbf{A}).$$

由此得 $\mathrm{Ker} f(\mathbf{A})\cap \mathrm{Ker} g(\mathbf{A})\subset \mathrm{Ker} d(\mathbf{A})$. $\square$

引理 5. 若 $f(x)=f_1(x)f_2(x)$, 且 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 互素. 则

$$\mathrm{Ker} f(\mathbf{A})=\mathrm{Ker} f_1(\mathbf{A})\oplus\mathrm{Ker} f_2(\mathbf{A}).$$

证. 由 $f_1(x),f_2(x)|f(x)$, 知

$$\mathrm{Ker} f_1(\mathbf{A})+\mathrm{Ker} f_2(\mathbf{A})\subset\mathrm{Ker} f(\mathbf{A}).$$

另一方面, 有 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 互素, 知存在多项式 $u_1(x),u_2(x)$ 使得 $u_1(x)f_1(x)+u_2(x)f_2(x)=1$, 因此

$$u_1(\mathbf{A})f_1(\mathbf{A})+u_2(\mathbf{A})f_2(\mathbf{A})=\mathbf{E}. \tag{1}$$

任取 $v\in\mathrm{Ker} f(\mathbf{A})$, 有

$$\begin{aligned} v &= u_1(\mathbf{A})f_1(\mathbf{A}).v+u_2(\mathbf{A})f_2(\mathbf{A}).v \\ &:= v_2+v_1\in\mathrm{Ker} f_2(\mathbf{A})+\mathrm{Ker} f_1(\mathbf{A}). \end{aligned}$$

因此 $\mathrm{Ker} f(\mathbf{A})\subset\mathrm{Ker} f_1(\mathbf{A})+\mathrm{Ker} f_2(\mathbf{A})$. 因而

$$\mathrm{Ker} f(\mathbf{A})=\mathrm{Ker} f_1(\mathbf{A})+\mathrm{Ker} f_2(\mathbf{A}).$$

最后由 (1), 知上式的和为直和. □

推论 6. (1) 若 $f(x) = f_1(x)f_2(x)\cdots f_k(x)$, 其中 $f_1(x), \cdots, f_k(x)$ 两两互素, 则

$$\mathrm{Ker} f(\mathbf{A}) = \oplus_{i=1}^{k} \mathrm{Ker} f_i(\mathbf{A}).$$

(2). 特别地，若 $f(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$, 则

$$V = \oplus_{i=1}^{k} \mathrm{Ker} f_i(\mathbf{A}),$$

其中每个子空间 $\mathrm{Ker} f_i(\mathbf{A})$ 都是线性变换 $\mathbf{A}$ 的不变子空间. □

Jordan-Chevalley 分解定理的证明：

设 $\mathbf{A} \in \mathrm{End}V$, $a_1, \cdots, a_k$ 为 $\mathbf{A}$ 的两两不同的特征值．记特征值 a_i 的重数为 $m_i \geq 1$. 则 $\mathbf{A}$ 的特征多项式为

$$f(x) = \prod_{i=1}^{k} (x - a_i)^{m_i}.$$

因此 $f(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$. 记 $V_i = \mathrm{Ker}(\mathbf{A} - a_i\mathbf{E})^{m_i}$. 则

$$V = \oplus_{i=1}^{k} V_i,$$

且 V_i 都是 $\mathbf{A}$ 的不变子空间．利用中国剩余定理 (推论 3) 知，存在常数项为零的多项式 $p(x)$, 使得

$$(x - a_i)^{m_i} | (p(x) - a_i)$$

对所有 $1 \leq i \leq k$ 成立．再记 $q(x) = x - p(x)$, 及线性变换

$$\mathbf{S} = p(\mathbf{A}), \quad \mathbf{N} = q(\mathbf{A}).$$

显然有 $\mathbf{A} = \mathbf{S} + \mathbf{N}$, 且线性变换 $\mathbf{S}$, $\mathbf{N}$ 及 $\mathbf{A}$ 两两可交换．下面我们证明 $\mathbf{S}$ 是半单的，而 $\mathbf{N}$ 是幂零的．

事实上，由 $(x-a_i)^{m_i}|(p(x)-a_i)$, 得

$$p(x)-a_i=g_i(x)(x-a_i)^{m_i},$$

因此

$$p(\mathbf{A})-a_i\mathbf{E}=g_i(\mathbf{A})(\mathbf{A}-a_i\mathbf{E})^{m_i}. \tag{2}$$

由 $V=\oplus_{i=1}^{k}V_i$, 任取 $v\in V_i=\mathrm{Ker}(\mathbf{A}-a_i\mathbf{E})^{m_i}$, 利用 (2) 得

$$p(\mathbf{A}).v=a_iv, \tag{3}$$

由此知 $p(\mathbf{A})$ 可对角化，亦， $\mathbf{S}=p(\mathbf{A})$ 是半单的．进一步，由

$$\mathbf{N}^{m_i}=(\mathbf{A}-p(\mathbf{A}))^{m_i}$$

对任意 $v\in V_i=\mathrm{Ker}(\mathbf{A}-a_i\mathbf{E})^{m_i}$, 由 (3) 显然有

$$\mathbf{N}^{m_i}.v=(\mathbf{A}-p(\mathbf{A}))^{m_i}.v=(\mathbf{A}-a_i\mathbf{E})^{m_i}.v=0.$$

因此 $\mathbf{N}^m=\mathbf{0}$, 其中 $m=\max_{1\le i\le k}m_i$. 亦， $\mathbf{N}$ 为幂零线性变换.

最后，证明分解 $\mathbf{A}=\mathbf{S}+\mathbf{N}$ 是唯一的．设 $\mathbf{A}=\mathbf{S}_1+\mathbf{N}_1$ 是另一个这样的分解，其中 $\mathbf{S}_1,\mathbf{N}_1$ 可交换，且 $\mathbf{S}_1$ 为半单， $\mathbf{N}_1$ 为幂零．由 $\mathbf{A}=\mathbf{S}_1+\mathbf{N}_1$, 知 $\mathbf{S}_1,\mathbf{N}_1$ 与 $\mathbf{A}$ 可交换，进而与 $\mathbf{S}=\mathrm{p}(\mathbf{A}),\mathbf{N}=q(\mathbf{A})$ 也可交换.

再由等式

$$\mathbf{S}-\mathbf{S}_1=\mathbf{N}_1-\mathbf{N},$$

其中左边 $\mathbf{S}-\mathbf{S}_1$ 是两个可交换的半单线性变换之差，而等式的右边 $\mathbf{N}_1-\mathbf{N}$ 是两个可交换的幂零线性变换之差．由此知

$$\mathbf{S}-\mathbf{S}_1=\mathbf{N}_1-\mathbf{N}=\mathbf{0},$$

亦分解唯一. □

谢　谢　大　家