教学研讨会

线性变换与矩阵

辛 林

福建师大数学与计算机科学学院

主要内容

- 一、线性映射与矩阵
- 二、线性变换与矩阵
- 三、正交变换与正交矩阵
- 四、对称变换与对称矩阵
- 五、伴随算子、共轭变换与矩阵转置

1 线性映射与矩阵

设$_FV$是一个n维向量空间，$_FW$是一个m维向量空间。记$\mathrm{Hom}_F(V,W)$是V到W的所有线性映射构成的集合，这也是F-向量空间。

$$\mathrm{Hom}_F(V,W) \overset{\varphi}{\cong} F^{m\times n}$$

同构对应φ的构造如下：取定V基：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$, 和取定$W$的基：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$. 则对$\forall f \in \mathrm{Hom}_F(V,W)$, 如果$f(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)A_f$, 则$\varphi:\mathrm{Hom}_F(V,W)\to F^{m\times n}: f\mapsto A_f$. 这是向量空间同构映射.

如果取另外一对基，则得到的矩阵与原来矩阵具有相抵关系。

2 线性变换与矩阵

设$_FV$是一个n维向量空间。记$\mathrm{End}_F(V)$是V到自身的所有线性变换构成的集合，这是F-代数。

$$\mathrm{End}_F(V) \overset{\varphi}{\cong} F^{n\times n}$$

同构对应φ的构造如下：取定V基：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$, 则对$\forall f \in \mathrm{End}_F(V)$, 如果$f(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)A_f$, 则$\varphi : \mathrm{Hom}_F(V) \to F^{n\times n} : f \mapsto A_f$. 这是代数同构映射.

如果取另外一个基，则得到的矩阵与原来矩阵具有相似关系。

3 正交变换与正交矩阵

设$_RV$是一个n维欧氏空间。记$< -,- >$表示其上的内积，如果线性变换f满足$< \alpha,\beta >=< f(\alpha),f(\beta) >, \forall \alpha,\beta \in V$, 称$f$是$V$上的正交变换。记$O(_RV)$表示$V$上的所有正交变换构成的集合，这是一个群。

$$O(_RV) \overset{\varphi}{\cong} O(R^{n\times n})$$

其中$O(R^{n\times n})$表示n阶正交矩阵全体构成的乘法群。

同构对应φ的构造如下：取定V的一个标准正交基：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$, 则对$\forall f \in O(_RV)$, 如果$f(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)U_f$, 则$\varphi: O(_RV)\to O(R^{n\times n}): f\mapsto U_f$. 这是群同构映射.

如果取另外一个标准正交基，则得到的矩阵与原来矩阵具有正交相似关系。

4 对称变换与对称矩阵

设${}_RV$是一个n维欧氏空间。记$< -,- >$表示其上的内积，如果线性变换f满足$< \alpha, f(\beta) >=< f(\alpha), \beta >, \forall \alpha, \beta \in V$, 称$f$是$V$上的对称变换。记$S({}_RV)$表示$V$上的所有对称变换构成的集合，这是一个向量空间。

$$S({}_RV) \overset{\varphi}{\cong} S(R^{n\times n})$$

其中$S(R^{n\times n})$表示n阶对称矩阵全体构成的向量空间。

同构对应φ的构造如下：取定V的一个标准正交基：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$, 则对$\forall f \in S({}_RV)$, 如果$f(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)S_f$, 则$\varphi : S({}_RV) \to S(R^{n\times n}) : f \mapsto S_f$. 这是向量空间同构映射.

如果取另外一个标准正交基，则得到的矩阵与原来矩阵具有正交相似关系。

5 伴随算子、共轭算子与矩阵转置

设$_KV$是一个n维向量空间，$\mathrm{Hom}_K(V,K)$表示其对偶空间.如果$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$, 是$V$的一个基，则令$\alpha_i^*: V\to K$ 使得$\alpha_i^*(\alpha_j)=\begin{cases}1, & 当 i=j\\ 0, & 当 i\neq j\end{cases}$，称$\alpha_1^*,\alpha_2^*,\cdots,\alpha_n^*$是$V^*=\mathrm{Hom}_K(V,K)$ 上的关于$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$的对偶基。

另取m维向量空间$_KW$，设$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$是$W$的一个基，同上面一样，设$\beta_1^*,\beta_2^*,\cdots,\beta_m^*$是$W^*=\mathrm{Hom}_K(W,K)$ 相应的对偶基。如果$f\in\mathrm{Hom}_K(V,W)$，令$f'\in\mathrm{Hom}_K(W^*,V^*)$使得$f'(g)=gf$，其中$g\in W^*$, 则称$f'$是$f$的伴随算子。

下面分别考察f与f'在基及对偶基下的矩阵关系：

设$f(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\beta_1,\cdots,\beta_m)A$, 由于$f'(\beta_i^*)=\beta_i^*f$, 所以

$$f'(\beta_1^*,\cdots,\beta_m^*)=(\beta_1^*f,\cdots,\beta_m^*f)=(\alpha_1^*,\alpha_2^*,\cdots,\alpha_n^*)A'$$

下面考察伴随算子在欧氏空间中的情况。

定理（Riesz表示定理）:设${}_RV$是一个n维欧氏空间，对任意$f\in V^*$, 存在唯一向量$x\in V$, 使得对任意$y\in V$有$f(y)=<y,x>$. 由此建立了向量空间同构$\phi:V^*\cong V$使$\phi(f^*)=x$.

对任意$f\in \mathrm{Hom}_K(V,W)$和$w\in W$，考虑函数$\theta_w:V\to R$使$\theta_w(v)=<f(v),w>$.直接验证将表明$\theta_w\in V^*$.由Riesz表示定理，存在唯一的$x\in V$使得

$$\theta_w(v)=<f(v),w>=<v,x>$$

于是令$f^*(w)=x$, 可证明$f^*:W\to V$是线性映射，称为f的共轭算子。从而有下面映射图：

$$\begin{tikzcd}
W^* \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\phi_1"] & V^* \arrow[d, "\phi_2"] \\
W \arrow[r, "f^*"] & V
\end{tikzcd}$$

其中$\Phi_1:W^*\cong W$和$\Phi_2:V^*\cong V$是由Riesz表示定理确定的同构映射。下面证明这是交换图。

Home Page
Title Page
Page 8 of 9
Go Back
Full Screen
Close
Quit

若$x\in V,\phi_2^{-1}(x)=g$，则$\phi_2(g)=x,\phi_2^{-1}(x)(v)=g(v)=< v,\phi_2(g)>=< v,x>$. 于是$(\phi_2)^{-1}f^*\phi_1(h)(v)=(\phi_2)^{-1}[f^*\phi_1(h)](v)=< v,f^*\phi_1(h)>=< f(v),\phi_1(h)>=h(f(v))=f'(h)(v)$ 故$(\phi_2)^{-1}f^*\phi_1=f'$，即$f^*\phi_1=\phi_2 f'$.

现取V的标准正交基$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$，和W的标准正交基$\beta_1,\cdots,\beta_m$。如果

$$f(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\beta_1,\cdots,\beta_m)A$$

则由$< \alpha_j,\phi_2(\alpha_i^*)-\alpha_i>=0,\forall j$，得$\phi_2(\alpha_i^*)=\alpha_i$. 同理$\phi_1(\beta_i^*)=\beta_i$. 所以$f^*(\beta_1,\cdots,\beta_m)=f^*\phi_1(\beta_1^*,\cdots,\beta_m^*)=\phi_2 f'(\beta_1^*,\cdots,\beta_m^*)=\phi_2(\alpha_1^*,\cdots,\alpha_n^*)A'=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)A'$.所以$f^*$与$f'$分别在标准正交基和对偶基下的矩阵是同一个矩阵，它们都是线性变换f的矩阵的转置矩阵。

注：如果考虑酉空间，则共轭变换f^*在标准正交基下的矩阵是线性变换f的矩阵的共轭转置矩阵。

参考文献

[1] 龚昇，线性代数五讲[M]，科学出版社，2005年.

[2] 陈昭木，陈清华，王华雄，林亚南，高等代数[M]，福建教育出版社，1992年.