# 第八章　欧氏空间

## §8.4 正交变换，正交矩阵

**定义** 8.4.1 设 $\varphi$ 是 $n$ 维欧氏空间 $V$ 的线性变换，如果 $\varphi$ 保持内积不变，即对于任意的 $\alpha, \beta \in V$, 有

$$(\varphi(\alpha), \varphi(\beta)) = (\alpha, \beta),$$

则称 $\varphi$ 是 **正交变换**.

下面的定理给出 $n$ 维欧氏空间 $V$ 的正交变换的不同角度的刻画. 从中也看出，欧氏空间 $V$ 的线性变换 $\varphi$ 是正交变换的充分必要条件是 $\varphi$ 是 $V$ 作为欧氏空间的自同构.

**定理** 8.4.1 设 $\varphi$ 是 $n$ 维欧氏空间 $V$ 的线性变换，则下列条件等价：

(1) $\varphi$ 是正交变换;

(2) $\varphi$ 保持长度不变，即对于任意的 $\alpha \in V$, 有 $|\varphi(\alpha)| = |\alpha|$;

(3) $\varphi$ 将 $V$ 的标准正交基变为标准正交基;

(4) $\varphi$ 在 $V$ 的标准正交基下的矩阵是正交阵.

**证明** (1)$\Rightarrow$ (2): 对于任意的 $\alpha \in V$, 有

$$(\varphi(\alpha), \varphi(\alpha)) = (\alpha, \alpha),$$

两边开平方，得到 $|\varphi(\alpha)| = |\alpha|$.

(2)$\Rightarrow$ (1): 对于任意的 $\alpha, \beta \in V$,

$$(\varphi(\alpha), \varphi(\alpha)) = (\alpha, \alpha),$$

$$(\varphi(\beta), \varphi(\beta)) = (\beta, \beta),$$

$$(\varphi(\alpha + \beta), \varphi(\alpha + \beta)) = (\alpha + \beta, \alpha + \beta).$$

将后面等式展开，得到 $(\varphi(\alpha), \varphi(\alpha)) + (\varphi(\beta), \varphi(\beta)) + 2(\varphi(\alpha), \varphi(\beta)) = (\alpha, \alpha) + (\beta, \beta) + 2(\alpha, \beta)$. 将前两式代入，得到 $(\varphi(\alpha), \varphi(\beta)) = (\alpha, \beta)$.

(1)$\Rightarrow$(3): 设 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 是 $V$ 的一个标准正交基. 则

$$(\varphi(\xi_i), \varphi(\xi_j)) = (\xi_i, \xi_j) = \delta_{ij}, \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n).$$

所以 $\varphi(\xi_1), \varphi(\xi_2), \cdots, \varphi(\xi_n)$ 也是 $V$ 的一个标准正交基.

(3) $\Rightarrow$ (4): 设 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 是 $V$ 的一个标准正交基,

$$\varphi(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)Q.$$

因为 $\varphi(\xi_1), \varphi(\xi_2), \cdots, \varphi(\xi_n)$ 也是 $V$ 的标准正交基. 所以 $Q$ 是从标准正交基 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 到标准正交基 $\varphi(\xi_1), \varphi(\xi_2), \cdots, \varphi(\xi_n)$ 的过渡矩阵，所以 $Q$ 是正交矩阵.

(4)⇒ (3): 设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 是 $V$ 的一个标准正交基,

$$\varphi(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)Q.$$

因为 $Q$ 是正交矩阵，所以 $\varphi(\xi_1),\varphi(\xi_2),\cdots,\varphi(\xi_n)$ 也是 $V$ 的标准正交基.

(3) ⇒ (1): 设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 是 $V$ 的一个标准正交基， $\varphi(\xi_1),\varphi(\xi_2),\cdots,\varphi(\xi_n)$ 也是 $V$ 的标准正交基. 对任意 $\alpha=a_1\xi_1+a_2\xi_2+\cdots+a_n\xi_n$, $\beta=b_1\xi_1+b_2\xi_2+\cdots+b_n\xi_n\in V$, 有 $(\varphi(\alpha),\varphi(\beta))=(a_1\varphi(\xi_1)+a_2\varphi(\xi_2)+\cdots+a_n\varphi(\xi_n),b_1\varphi(\xi_1)+b_2\varphi(\xi_2)+\cdots+b_n\varphi(\xi_n))=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=(a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_n\varepsilon_n,b_1\varepsilon_1+b_2\varepsilon_2+\cdots+b_n\varepsilon_n)=(\alpha,\beta)$. □

**定理** 8.4.2 设 $n$ 阶实矩阵 $A$ 是正交阵，则

(1) $\det A=\pm1$;

(2) $A$ 的特征值的模长为 1.

**证明** (1) 显然. 因为 $AA^T=E$, 两边取行列式即得.

(2) 设 $\lambda$ 是 $A$ 的特征值， $X$ 是属于 $\lambda$ 的特征向量，则 $AX=\lambda X$. 两边同取共轭转置，于是 $\overline{X}A^T=\overline{\lambda X}^T$, 所以

$$\overline{X}A^TAX=\overline{\lambda X}^T\lambda X,$$

所以

$$\overline{X}^TX=\overline{\lambda}\lambda(\overline{X}^TX).$$

因为 $X\neq0$, 所以 $\overline{X}^TX\neq0$. 因此， $\overline{\lambda}\lambda=1$. 即 $|\lambda|=1$. □

**引理** 8.4.1 设 $A$ 为 $n$ 阶正交阵， $\lambda=a+bi$ 为 $A$ 的一个复特征值（ $b\neq0$ ）， $X=\alpha+\beta i$ 为对应的特征向量，其中 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^n$. 则 $\alpha$ 和 $\beta$ 正交且 $|\alpha|=|\beta|$.

**证明** 因为 $A(\alpha+\beta i)=(a+bi)(\alpha+\beta i)$, 所以 $A\alpha=a\alpha-b\beta$, $A\beta=b\alpha+a\beta$. 从而

$$|\alpha|^2=(\alpha,\alpha)=(A\alpha,A\alpha)=a^2|\alpha|^2+b^2|\beta|^2-2ab(\alpha,\beta) \tag{1}$$

$$|\beta|^2=(\beta,\beta)=(A\beta,A\beta)=b^2|\alpha|^2+a^2|\beta|^2+2ab(\alpha,\beta) \tag{2}$$

由 $(1)-(2)$, 得

$$(a^2-b^2-1)|\alpha|^2+(b^2-a^2+1)|\beta|^2-4ab(\alpha,\beta)=0 \tag{3}$$

而

$$(\alpha,\beta)=(A\alpha,A\beta)=(a^2-b^2)(\alpha,\beta)+ab(|\alpha|^2-|\beta|^2) \tag{4}$$

由 (3), (4), 得

$$\begin{cases}(a^2-b^2-1)(|\alpha|^2-|\beta|^2)-4ab(\alpha,\beta)=0\\ ab(|\alpha|^2-|\beta|^2)+(a^2-b^2-1)(\alpha,\beta)=0\end{cases}$$

其可视为关于 $(|\alpha|^2-|\beta|^2)$ 和 $(\alpha,\beta)$ 的线性方程组. 由定理 8.4.2 知 $a^2+b^2=1$, 故

$$\begin{vmatrix} a^2-b^2-1 & -4ab \\ ab & a^2-b^2-1\end{vmatrix}=(a^2-b^2-1)^2+4a^2b^2=4b^4+4a^2b^2=4b^2(b^2+a^2)=4b^2\neq0,$$

因此方程组只有零解，即 $|\alpha|^2=|\beta|^2$, 且 $(\alpha,\beta)=0$. □

因为 $A$ 为正交阵, 因此特征值模长为 1, 即 $a^2+b^2=1$, 可设 $a=\cos\theta, b=-\sin\theta$. 这样

$$A\alpha=a\alpha-b\beta=(\alpha,\beta)\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix},\quad A\beta=b\alpha+a\beta=(\alpha,\beta)\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix},$$

$$A(\alpha,\beta)=(\alpha,\beta)\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}.$$

**定理** 8.4.3 设 $A$ 为 $n$ 阶正交阵, 则存在 $n$ 阶正交阵 $Q$, 使

$$Q^{-1}AQ=Q^TAQ=\mathrm{diag}(E_r,-E_s,\begin{pmatrix}\cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1\\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}\cos\alpha_l & -\sin\alpha_l\\ \sin\alpha_l & \cos\alpha_l\end{pmatrix})$$

其中 $r+s+2l=n$.

**证明** 对阶数用数学归纳法.

当 $n=1$ 时, 显然成立. 当 $n=2$ 时, 由 §8.2 习题 4, 结论成立. 假设当阶数 $<n$ 时命题成立. 讨论 $A$ 的阶数为 $n$ 的情况.

(1) 若 $A$ 有一个实特征根 $\lambda_0$, 则取其单位特征向量 $X_1$, 扩为 $\mathbb{R}^n$ 的标准正交基 $X_1,X_2,\cdots,X_n$, 从而

$$A(X_1,X_2,\cdots,X_n)=(X_1,X_2,\cdots,X_n)\begin{pmatrix}\lambda_0 & \beta^T\\ 0 & A_1\end{pmatrix}.$$

这里 $A_1$ 是 $n-1$ 阶方阵, $\beta\in\mathbb{R}^{n-1}$. 令 $Q_1=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$, 则

$$Q_1^{-1}AQ_1=\begin{pmatrix}\lambda_0 & \beta^T\\ 0 & A_1\end{pmatrix}=B.$$

因为 $Q^{-1}=Q^T$, 所以 $A^{-1}=A^T$. 进而 $B^{-1}=B^T$, 即 $B$ 是正交阵, 故

$$BB^T=\begin{pmatrix}\lambda_0 & \beta^T\\ 0 & A_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_0 & 0\\ \beta & A_1^T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_0^2+\beta^T\beta & \beta^TA_1^T\\ A_1\beta & A_1A_1^T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & E_{n-1}\end{pmatrix}$$

得 $\lambda_0^2+\beta^T\beta=1$, $A_1A_1^T=E$. 而 $\lambda_0^2=1$, 因此 $\beta=0$, $A_1A_1^T=E$. 即

$$B=\begin{pmatrix}\lambda_0 & 0\\ 0 & A_1\end{pmatrix},$$

其中 $A_1$ 是正交阵. 由归纳假设, 存在 $n-1$ 阶正交阵 $Q_2$, 使

$$Q_2^{-1}A_1Q_2=\mathrm{diag}(E_p,-E_q,\begin{pmatrix}\cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1\\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}\cos\alpha_l & -\sin\alpha_l\\ \sin\alpha_l & \cos\alpha_l\end{pmatrix})$$

令 $Q=Q_1\begin{pmatrix}1 & \\ & Q_2\end{pmatrix}$, 则 $Q$ 为 $n$ 阶正交阵, 且

$$Q^{-1}AQ=\mathrm{diag}(\lambda_0,E_p,-E_q,\begin{pmatrix}\cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1\\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}\cos\alpha_l & -\sin\alpha_l\\ \sin\alpha_l & \cos\alpha_l\end{pmatrix}).$$

因为 $\lambda_0=\pm1$, 命题成立.

(2) 若 $A$ 无实特征根. 设 $\lambda=a+bi$ 是其一个复特征根, $\alpha+\beta i$ 为相应特征向量, 则由引理 8.4.1, $\alpha$ 与 $\beta$ 正交, 且 $|\alpha|^2=|\beta|^2$. 因 $|\lambda|=1$, 故可设 $\lambda=\cos\alpha-i\sin\alpha$. 取 $\alpha,\beta$ 的单位化向量 $X_1,X_2$, 则有

$$AX_1=\cos\alpha X_1+\sin\alpha X_2=(X_1,X_2)\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix},$$

$$AX_2 = -\sin\alpha X_1 + \cos\alpha X_2 = (X_1, X_2)\begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

将 $X_1, X_2$ 扩为 $\mathbb{R}^n$ 的标准正交基 $X_1, X_2, \cdots, X_n$, 则

$$A(X_1, X_2, \cdots, X_n) = (X_1, X_2, \cdots, X_n)\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} & C \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$

其中 $C$ 是 $2\times(n-2)$ 实矩阵, $A_1$ 是 $n-2$ 阶实方阵. 令 $Q_1 = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$, 则 $Q_1$ 是正交阵且

$$Q_1^T A Q_1 = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} & C \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} = B.$$

因为 $Q_1$, $A$ 为正交阵, 所以 $B$ 为正交阵. 故

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} & C \\ O & A_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^T & 0 \\ C^T & A_2^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ 0 & E_{n-2} \end{pmatrix}.$$

所以

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^T + CC^T = E_2, \quad A_2C^T = 0, \quad A_2A_2^T = E_{n-2}.$$

故 $A_2$ 是正交阵, 且 $C = 0$, 即

$$B = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}.$$

由归纳假设, 存在 $n-2$ 阶正交矩阵 $Q_2$, 使得

$$Q_2^{-1}A_2Q_2 = \mathrm{diag}(E_r, -E_s, \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} \cos\alpha_l & -\sin\alpha_l \\ \sin\alpha_l & \cos\alpha_l \end{pmatrix}).$$

令 $Q = Q_1\begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix}$, 则 $Q$ 为正交阵且

$$Q^{-1}AQ = \mathrm{diag}(\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, E_r, -E_s, \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} \cos\alpha_l & -\sin\alpha_l \\ \sin\alpha_l & \cos\alpha_l \end{pmatrix}).$$

定理 8.4.3 按照线性变换的语言来说, 就是

设 $\varphi$ 是 $n$ 维欧氏空间 $V$ 的正交变换, 则存在一个标准正交基, 使得 $\varphi$ 在此基下的矩阵是

$$\mathrm{diag}(E_r, -E_s, \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} \cos\alpha_l & -\sin\alpha_l \\ \sin\alpha_l & \cos\alpha_l \end{pmatrix}),$$

其中 $r + s + 2l = n$.

**习题**

1. (1) 设 $Q$ 是奇数阶正交矩阵，且 $\det Q = 1$, 则 1 是 $Q$ 的一个特征值;
(2) 设 $Q$ 是 $n$ 阶正交矩阵，且 $\det Q = -1$, 则 $-1$ 是 $A$ 的一个特征值.

2. 设 $\eta$ 是 $n$ 维欧氏空间 $V$ 中一单位向量，定义 $\varphi(\alpha) = \alpha - 2(\eta, \alpha)\eta$. 证明：
(1) $\varphi$ 是正交变换 (称为镜面反射);
(2) $\varphi^2 = \mathrm{id}_V$;
(3) 存在 $V$ 的一个标准正交基，使得 $\varphi$ 在这个标准正交基下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & E_{n-1} \end{pmatrix}.$$

3. 如果 $V$ 上的正交变换 $\varphi$ 以 1 作为一个特征值，且属于特征值 1 的特征子空间 $V_1$ 的维数为 $n-1$, 那么 $\varphi$ 是镜面反射.

4. 设 $\varphi$ 是 $n$ 维欧氏空间 $V$ 上的变换，对于任意的 $\alpha, \beta \in V$, 都有 $(\varphi(\alpha), \varphi(\beta)) = (\alpha, \beta)$. 证明：$\varphi$ 是线性变换，因而是正交变换.

5. 设 $\varphi$ 是欧氏空间 $V$ 上的正交变换， $U$ 是 $\varphi-$ 不变子空间，则 $U^{\perp}$ 也是 $\varphi-$ 不变子空间.

**复习题**

1. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 和 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ 是 $n$ 维欧氏空间 $V$ 的两个向量组. 证明存在正交变换 $\varphi$ 使得 $\varphi(\alpha_i) = \beta_i$, $1 \le i \le m$ 的充分必要条件是 $(\alpha_i, \alpha_j) = (\beta_i, \beta_j)$, $1 \le i, j \le m$.

2. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是欧氏空间的 $n$ 个向量，行列式

$$G(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = \begin{vmatrix} (\alpha_1, \alpha_1) & (\alpha_1, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_1, \alpha_n) \\ (\alpha_2, \alpha_1) & (\alpha_2, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_2, \alpha_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\alpha_n, \alpha_1) & (\alpha_n, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_n, \alpha_n) \end{vmatrix}$$

称为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 的 Gram 行列式. 证明： $G(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = 0$ 的充分必要条件是 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性相关.

3. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是欧氏空间的 $n$ 个线性无关的向量， $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$ 是这组向量经过正交化所得到的向量组. 求证:

$$G(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = G(\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n) = (\gamma_1, \gamma_1)(\gamma_2, \gamma_2) \cdots (\gamma_n, \gamma_n).$$

4. 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\beta \in \mathbb{R}^m$. 求证：线性方程组 $AX = \beta$ 有解的充分必要条件是 $\beta$ 与线性方程组 $A^T X = 0$ 的解空间在正交.

5. 设 $U$ 是 $n$ 维欧氏空间 $V$ 的子空间，由 $V = U \oplus U^{\perp}$, 对于任意的 $\alpha \in V$, $\alpha = \beta + \gamma$, 其中 $\beta \in U$ 称为 $\alpha$ 在 $U$ 的 **正射影**, $\gamma \in U^{\perp}$. 求证：对于 $U$ 中任意的 $\beta' \neq \beta$, 有

$$|\alpha - \beta| < |\alpha - \beta'|.$$

6. 证明：在 $\mathbb{R}^3$ 中向量 $(x_0, y_0, z_0)$ 到平面

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0\}$$

的最短距离等于

$$\frac{|ax_0+by_0+cz_0|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

7. 设 $A$ 是 $n$ 阶实可逆阵. 求证: $A=QT$, 其中 $Q$ 是正交阵, $T$ 是上三角阵且对角线元素大于零. 进一步, 证明这种表示方法是唯一的.

8. 已知 $\alpha_1=(1,-2,1)^T$, $\alpha_2=(-1,a,1)^T$ 依次是三阶不可逆实对称阵 $A$ 的属于特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=-1$ 的特征向量. 求

(1) $A$;

(2) $A^{2010}\beta$, 其中 $\beta=(1,1,1)^T$.

9. 设三阶实对称阵 $A$ 的特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=-2$, 又 $\alpha_1=(1,-1,1)^T$ 是 $A$ 的属于 $\lambda_1$ 的一个特征向量, 记 $B=A^5-4A^3+E$.

(1) 验证 $\alpha_1$ 是矩阵 $B$ 的特征向量, 并求 $B$ 的全部特征值和特征向量;

(2) 求矩阵 $B$.

10. 设矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$\beta=(1,1,-2)^T$. 已知线性方程组 $AX=\beta$ 有解但不唯一. 试求

(1) $a$ 的值;

(2) 正交矩阵 $Q$, 使得 $Q^TAQ$ 为对角矩阵.

11. 设

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & a \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix},$$

已知 $\alpha=(1,1,1)^T$ 是 $A$ 的特征向量.

(1) 求 $a,b$ 的值及特征向量 $\alpha$ 所对应的特征值;

(2) 求 $A$ 的全部特征值和特征向量;

(3) 问 $A$ 是否可对角化? 若是, 求正交矩阵 $Q$, 使得 $Q^{-1}AQ$ 为对角阵.

12. 设 $\varphi$ 是 $n$ 维欧氏空间 $V$ 上的线性变换. 证明: $\varphi$ 是对称变换的充分必要条件是 $\varphi$ 有 $n$ 个两两正交的特征向量.

13. 证明 $n$ 维欧氏空间的两个对称变换 $\varphi,\psi$ 有公共的由它们的特征向量组成的标准正交基的充要条件是 $\varphi\psi=\psi\varphi$.

14. 设 $A,B$ 是 $\mathbb{R}$ 上 $n$ 阶对称阵, 且 $AB=BA$. 求证: 存在正交阵 $Q$, 使得 $Q^{-1}AQ$, $Q^{-1}BQ$ 同时为对角阵.

15. 设 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 是 $m$ 个 $n$ 阶实对称阵且两两乘积可交换, 求证: 存在正交阵 $Q$, 使 $Q^TA_iQ(i=1,2,\cdots,m)$ 都是对角阵.

17. (1) 设 $\xi,\eta$ 是 $n$ 维欧氏空间 $V$ 中两个不同的单位向量, 证明存在一镜面反射 $\varphi$, 使得 $\varphi(\xi)=\eta$;

(2) 证明: $n$ 维欧氏空间中任意正交变换都可以表为一系列镜面反射的乘积.

18. 设 $Q$ 是正交矩阵. 证明：存在正交矩阵 $S$, 使得 $Q = S^3$.